Cognome e nome ____________________

Nickname ________________________

AM1 APPELLO C
21 GIUGNO 2006

Esercizio 1.

Dato l'insieme

$$A = \left\{ x = \frac{1}{\sqrt[n]{2n}},\ n \geq 1 \right\}$$

determinare estremo superiore ed inferiore, specificando se si tratta di massimo e minimo. Giustificare le risposte usando la definizione di estremo superiore, inferiore.

Il minimo si ottiene per $n = 1, 2$, infatti

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2n}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt[n]{2n} \leq 2 \Leftrightarrow 2n \leq 2^n.$$

Invece il sup (che non é un massimo) é 1. La successione $\sqrt[n]{2n}$ tende a 1 decrescendo, quindi il suo reciproco tende a 1 crescendo.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2n}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{2n} \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq 1,$$

quindi 1 é un maggiorante. Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} = 1$, per definizione di limite si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{n} : 1 - \varepsilon < \frac{1}{\sqrt[\overline{n}]{2\overline{n}}} < 1 + \varepsilon,$$

il che prova che 1 é proprio l'estremo superiore.

Esercizio 2.
Data la successione

$$a_n = \left[\frac{n + (-1)^n}{n}\right]$$

dove $[x]$ indica la funzione parte intera di x, trovare massimo e minimo limite di tale successione. Giustificare le risposte.

Osserviamo che per n pari $a_n = \left[\frac{n+1}{n}\right]$ e $1 < \frac{n+1}{n} < 2$ quindi $\left[\frac{n+1}{n}\right] = 1$ e $a_{2n} \equiv 1$. Ragionando nello stesso modo si ottiene che $a_{2n+1} \equiv 0$. Mostriamo che 1 é un maggiorante definitivo:

$$a_n = \left[\frac{n + (-1)^n}{n}\right] \leq \left[\frac{n+1}{n}\right] = 1 \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Allo stesso modo si prova che 0 é un minorante:

$$a_n = \left[\frac{n + (-1)^n}{n}\right] \geq \left[\frac{n-1}{n}\right] = 0 \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Questo prova che 0 é il minimo limite e 1 é il massimo limite.

Esercizio 3.
Data la successione

$$a_n = \left(1 + e^{-\sqrt{n}}\right)^{b_n}$$

determinare b_n in modo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e.$$

$b_n = e^{\sqrt{n}}$.

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\log(\log n)}{\log n}\right)^n$$

Osserviamo che se $a_n = \log n$, $\frac{\log a_n}{a_n} \to 0$, con $a_n \to \infty$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\log(\log n)}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log(\log n)}}\right]^{x_n}$$

la quantitá tra parentesi quadrate tende ad e, mentre $x_n = n^{\frac{\log(\log n)}{\log n}} \to +\infty$ quindi il limite finale é $+\infty$.

Esercizio 4.

Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\left[\frac{k}{1+k^2}\right]^k - k^2e^{-k^2}\right\}; \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\arctan(x^{2k}),$$

dove $[x]$ indica la funzione parte intera di x.

Osserviamo che $\left[\frac{k}{1+k^2}\right] \equiv 0$, quindi la serie in realtá si riduce a

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{-k^2e^{-k^2}\right\}.$$

Questa serie converge assolutamente per il criterio della radice.

Il termine k-simo della seconda serie é infinitesimo solo se $x^{2k} \to 0$, qindi sicuramente si deve porre $|x| < 1$. Inoltre, con il criterio del confronto asintotico, per $|x| < 1$, si ha

$$\frac{\arctan(x^{2k})}{x^{2k}} \to c,$$

quindi la serie ha lo stesso andamento della serie che ha come termine generico x^{2k}, serie geometrica che converge per $|x| < 1$.

Esercizio 5.

Trovare, se ce ne sono, i punti di accumulazione del seguente insieme:

$$A = \left\{ x = \frac{\sqrt{n}}{n^2} - 1,\ n \geq 1 \right\}$$

Osserviamo che $\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, una quantitá infinitesima, quindi proviamo che l'unico punto di accumulazione é -1.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \ A : |1 - x| < \varepsilon$$

ovvero

$$|1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - 1| = |\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}$$