Simulazione di esonero di AM1

Un consiglio: fatelo da soli e senza libri in tre ore, altrimenti che simulazione sarebbe??

Giustificare tutte le affermazioni

Esercizio 1.
Dato l'insieme:

$$A = \{x = \frac{\sqrt{2}n}{2+n},\ n \in \mathbf{N}\}$$

Determinarne l'estremo superiore ed inferiore, specificare se si tratta di massimo o minimo.

Esercizio 2.
Dato l'insieme

$$A = \{x = (-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

trovare gli eventuali punti di accumulazione. Dimostrare che il punto $x = 1 + \frac{1}{4}$ é isolato.

Esercizio 3.
Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Esercizio 4.
Dando per buono il seguente Teorema (permanenza del segno per polinomi):

Teorema 0.0 *Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali. Se per un certo $x_0 \in \mathbb{R}$ risulta $P(x_0) > 0$, allora esiste un intorno $I(x_0, r)$, $r > 0$, tale che $\forall x \in I(x_0, r)$, $P(x) > 0$.*

Dimostrare il Teorema degli zeri per polinomi, ovvero:

Teorema 0.1 *Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali, siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Se $P(x_1) < 0$ e $P(x_2) > 0$ allora esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che $P(c) = 0$.*