V tutorato di Analisi Matematica 1A

Gabriele Nocco Stefano Urbinati

24 ottobre 2005

Esercizio 1. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e motivare la risposta:

Sia E un insieme non vuoto di numeri reali.

a) L'estremo superiore di E è sempre punto di accumulazione per E.

b) Se c è un punto di accumulazione per E, dato un arbitrario $\epsilon > 0$, l'intervallo $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ deve contenere infiniti punti di E.

c) L'intervallo $[a, +\infty)$ risulta chiuso in $\mathbb{R}$, mentre l'insieme $[a, b)$ non è nè aperto nè chiuso.

Soluzione 1. **a)** Falso. Se ad esempio prendiamo in considerazione un insieme composto da un numero finito di punti isolati, esso evidentemente non ha punti di accomulazione, ma avrá lo stesso un estremo superiore, che in questo caso sará anche un massimo, ma non che non è un punto d'accomulazione!!!

b) Vero. Per dimostrare la veridicitá di questa affermazione basta pensare alla definizione di punto di accomulazione e alle propriet$\tilde{\text{A}}$ di densitá di $\mathbb{R}$, infatti prendiamo $(c-\epsilon, c+\epsilon)$, in questo intervallo ci deve essere almeno un punto diverso da c appartenente a E, che chiamiamo x'. A questo punto prendiamo un $\epsilon' < |c - x'|$. Essendo c ancora di accomulazione anche per questo ϵ' dovrá esistere un x''.

c) Vero. $[a, +\infty)$ è chiuso poiché contiene tutti i suoi punti di accomulazione, $[a, b)$ invece non è aperto poiché un qualsiasi intorno di $\{a\}$ non è interamente contenuto in $[a, b)$, e non è chiuso perché lo stesso ragionamento vale per il complementare di $[a, b)$ prendendo intorni centrati in $\{b\}$.

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $C = A \cup B$, dove

$A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x = -2 + \log{(1 + \frac{1}{n})^{-1}}, n \in \mathbb{N}_0\}$. Determinare:

a) l'insieme dei punti di accumulazione di C.

b) l'insieme dei punti isolati di C.

c) l'insieme dei punti interni di C.

Soluzione 2. **a)** Ipunti di accomulazione di C son i punti di accomulazione di $A \cup$ i punti di accomulazione di B, quindi $[-2, 3]$

b) I punti isolati di C coincidono in questo con l'insieme B.

c) I punti interni di C sono $(-2, 3)$.

Esercizio 3. Dati i seguenti insiemi trovere tutti i punti di accumulazione, estremo inferiore, estremo superiore e qualora esistano massimo e minimo motivando ogni risposta con la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \frac{n}{n+4}, n \in \mathbb{N}\}$

b) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} + \log 1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\cos n\pi}{n^2+16}, n \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = n + log\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}_0\}$

Soluzione 3. **a)** I punti di accumulazione sono ± 1, che saranno anche sup e inf dell'insieme ma non max e min.

b) Il punto di accumulazione è $-\infty$, che sará automaticamente un inf. Attraverso la caratterizzazione si puó far vedere che 1 è un punto di massimo.

c) Il punto di accumulazione è 0, che si ha sia per n pari che dispari. Questo non sará ne massimo ne minimo, infatti per n pari si ha che i valori sono decrescenti positivi, quindi basterá prendere il primo valore per avere un massimo, quindi $max(E) = 1/16$, specularmente si otterrá un minimo vedendo il primo valore della n dispari, che viene raggiunto in $n = 1$, quindi $min(E) = -1/17$.

d) Il punto di accumulazione è ∞, per farlo vedere basti ricordare che la funzione logaritmo è piú lenta di qualsiasi potenza. Questo sará automaticamente il sup. Per trovare il minimo baster'a prendere il valore che si ottiene da $n = 1$, quindi 1.

Esercizio 4. Trovare, qualora esistano, estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi e dire se sono rispettivamente un massimo e un minimo per lo stesso insieme. Motivare le risposte verificandole attraverso la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{t+1}{t-2}, t \in \mathbb{R}\}$

b) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \sin\frac{n\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n^2}{n+3}, n \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = -n^2 + 22n + 10, n \in \mathbb{N}\}$

f) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-\sqrt{n}}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$

Soluzione 4. **a)** $Sup(E) = \infty$ $Inf(E) = -\infty$ è una iperbole con gli assi paralleli agl'assi coordinati!!!

b) $Sup(E) = 1$ $Inf(E) = -1$ che sono anche massimo e minimo.

c) $Sup(E) = \infty$ $Inf(E) = -\infty$

d) $Sup(E) = 131$ $Inf(E) = -\infty$

f) $Sup(E) = 1$ $Inf(E) = 0$

Esercizio 5. Dimostrare che:
se A è limitato superiormente, tale che $l = supA \notin A$ allora
$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ I(l, \epsilon) : I(l, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Soluzione 5. Si dimostra con le definizioni.

Esercizio 6. Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2\}$, dimostrare che:

a) $\forall \epsilon > 0, \ \exists \ I(x, \epsilon) : I(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

b) $\forall \epsilon > 0, \ \exists \ I(0, \epsilon)$ e $\exists I(2, \epsilon)$ che contengono punti di A e di $C(A)$.

e trovare l'insieme dei punti interni A.

Soluzione 6. Si puó far vedere facilmente con le definizioni di punto d'accumulazione. L'insieme dei punti interni è l'insieme$[0, 2]$.

Esercizio 7. Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_0\}$, dimostrare che:

a) $\forall \epsilon > 0, \ \exists \ \overline{x} \in B : \overline{x} \in I(2, \epsilon)$.

b) $\exists r > 0 \ : \ I(2 + \frac{1}{4}, r) \cap A \neq \emptyset$.

c) $\forall r >$
$0, \exists I(2, r) : I(2, r) \cap B \neq \emptyset \wedge I(2, r) \cap C(B) \neq \emptyset$.

e trovare l'insieme dei punti interni di B.

Soluzione 7. Si puó far vedere sempre con le definizioni. In questo caso i punti interni non ci sono, anche perché l'insieme B è composto da soli punti isolati!!!