I tutorato di Analisi Matematica 1A

Gabriele Nocco   Stefano Urbinati

26 settembre 2005

Esercizio 1. Dimostrare che, se a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, risulta:
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Esercizio 2. Dire per quali $x \in R$ sono soddisfatte le seguenti disuguaglianze:

a) $\left|\frac{|x+1|+3}{|2x|+1}\right| \leq 4$

b) $|(4-\sqrt{6})\sin^2 x - \sqrt{6}\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x| > 2\sqrt{2}\sin x$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(7-2^x) - \log_{\frac{1}{2}}(5+4^x) + \log_{\frac{1}{2}} 7 \geq 0$

d) $|\log_9(2x^2 - x + 1) - \log_3(x-2)| \leq 1$

Esercizio 3. Si provi per induzione che, per ogni intero positivo n, risulta:

$$n^n \geq n!$$

Esercizio 4. Si provi per induzione che, per ogni intero positivo n, risulta:

$$\sum_{k=0}^{n}(4k+1) = (2n+1)(n+1)$$

Esercizio 5. Si provi per induzione che, per ogni intero positivo n, risulta

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esercizio 6. Dimostrare la seguente proprietà, applicando il principio d'induzione:
per tutti i naturali $n \in \mathbb{N}$, la potenza n-esima di 4 diminuita di 1 è divisibile per 3.

Esercizio 7. Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Esercizio 8. Dimostrare, per induzione, le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Esercizio 9. ***Momento relax***: trova l'errore in queste dimostrazioni per induzione giustificando la risposta.

- Zero uomini non hanno orecchie, prendendo questo come base induttiva possiamo supporre che, ogni gruppo di $n-1$ persone non abbiano orecchie, quindi adesso procediamo col passo induttivo; aggiungiamo un uomo al gruppo di $n-1$ uomini che abbiamo come base induttiva, e togliamone uno dall'insieme originale. Così modificato questo sarà un insieme di $n-1$ che per ipotesi induttiva non ha orecchie!!!

- C'è una scatola con n pastelli di diversi colori. Prendo un pastello, questo è rosso (base induttiva); per ipotesi ogni gruppo di $n-1$ pastelli è formato da pastelli rossi; allora tutti i pastelli della scatola sono rossi! Infatti aggiungendo un pastello al gruppo degli $n-1$ dell'ipotesi induttiva e togliendone uno dei vecchi, ottengo un gruppo di $n-1$ pastelli che per ipotesi sono tutti rossi e l'asserto è verificato!!!