IV tutorato di Analisi Matematica 1A

Gabriele Nocco   Stefano Urbinati

17 ottobre 2005

Esercizio 1. Verificare quale tra le seguenti è una distanza in $\mathbb{R}$:

a) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

b) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$

c) $d(x,y) = |x-y|^2$

d) $d(x,y) = |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|$

e) $d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$

Esercizio 2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e motivare la risposta:

Sia E un insieme non vuoto di numeri reali.

a) l è estremo inferiore per E se l è un minorante di E ed è tale che $\forall x \in E, \exists\, \epsilon > 0$ per cui risulta $x < l + \epsilon$

e) L'intervallo $[\,a, +\infty)$ risulta chiuso in $\mathbb{R}$, mentre l'insieme $[\,a, b)$ non è nè aperto nè chiuso.

Esercizio 3. Trovare, qualora esistano, estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi e dire se sono rispettivamente un massimo e un minimo per lo stesso insieme. Motivare le risposte verificandole attraverso la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in [\,\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\,] : x = \frac{m}{2^n}, n, m \in \mathbb{N}\}$

b) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3n-2}{2n}, n \in \mathbb{N}\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 4. Dimostrare che ogni insieme A, chiuso e limitato, ha Massimo e Minimo.

Esercizio 5. Dato l'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : a_n = (-1)^n \frac{n}{n+3}, n \in \mathbb{N}\}$ determinare, sup A, inf A.

Esercizio 6. Dimostrare che dati due insiemi qualunque $X,\ Y \neq \emptyset$, $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, si ha

$$\inf X \leq \inf Y \leq \sup Y \leq \sup X.$$

Esercizio 7. Dimostrare che dati due insiemi qualunque $X,\ Y \neq \emptyset$, se $X + Y := \{x + y, x \in X,\ y \in Y\}$, si ha:

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$$

Esercizio 8. Sia $X \in \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ e sia $tX := \{tx :\ x \in X,\ t \in \mathbb{R}^+\}$, allora si ha

$$\sup(tX) = t \sup X$$

Esercizio 9. Dimostrare che un insieme $X \in \mathbb{R}$ e' limitato $\Longleftrightarrow$ esiste un numero reale $M > 0$ tale che $|x| < M,\ \forall x \in X$.