Am1c – Soluzioni Tutorato II

Limiti e Continuità

Venerdì 3 Marzo 2006

Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

Esercizio 1

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\ln y}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(z+1)}=1$

(2) $\lim_{x\to 4}\frac{\sin(x^3-4x^2+x-4)}{\sin(x^2-6x+8)}=\lim_{x\to 4}\frac{\sin((x^2+1)(x-4))}{(x^2+1)(x-4)}\frac{(x-2)(x-4)}{\sin((x-2)(x-4))}\frac{(x^2+1)}{(x-2)}=\frac{17}{2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x+x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x(x-1))}{x(x-1)}(x-1)=-1$

(4) $\lim_{x\to -\infty}(1+e^x)^x=\lim_{x\to -\infty}\left[\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)^{e^{-x}}\right]^{xe^x}=1$

(5) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to \infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{x}{x+1}}=e$

(6) $\lim_{x\to \infty}\sin x\left[\ln(\sqrt{x}+1)-\ln(\sqrt{x+1})\right]=\lim_{x\to \infty}\sin x\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to \infty}\sin x\cdot\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right)=0$

(7) $\lim_{x\to 0^+}x^{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln^2 x}=+\infty$

(8) $\lim_{x\to \infty}3^x-x^4=\lim_{x\to \infty}3^x\left(1-\frac{x^4}{3^x}\right)=\infty$

Esercizio 2 No, ad esempio la funzione $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ soddisfa la condizione richiesta ma non è continua nell'origine

Esercizio 3

(1) Discontinua nell'origine in quanto $\lim_{x\to 0^-}e^{-\frac{1}{x^{2n+1}}}=+\infty$

(2) La funzione è continua $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ in quanto composizione di funzioni continue. Inoltre è continua anche nell'origine in quanto $0=f(0)=\lim_{x\to 0}x^5\sin^4\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to\infty}\frac{\sin^4(y)}{y^5}=0$.

(3) Discontinua nell'origine in quanto $2=f\left(0\right)\neq\lim_{x\to0^{-}}\frac{\tan x}{x^{2}}5^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to-\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}x5^{x}=0$

(4) Discontinua in -5 in quanto $4=f\left(-5\right)\neq\lim_{x\to-5}\frac{x^{2}+7x+10}{x+5}=\lim_{x\to-5}\frac{\left(x+2\right)\left(x+5\right)}{x+5}=\lim_{x\to-5}x+2=-3$

Esercizio 4

(1) Poiché risulta $f\left(1\right)=a+b$ $\lim_{x\to1^{+}}ax+b=a+b$ $\lim_{x\to1^{-}}cx^{2}+dx+2=c+d+2$ la funzione è continua in $1\Leftrightarrow a+b=c+d+2$

(2) Poiché risulta $f\left(0\right)=7$ $\lim_{x\to0^{+}}ax^{8}+7=7$ $\lim_{x\to0^{-}}e^{bx}-c=1-c$ la funzione è continua in $0\Leftrightarrow c=-6$

(3) Si ottiene che $\lim_{x\to0^{+}}x^{a}\sin^{4}x=0\Leftrightarrow a>-4$ $\lim_{x\to0^{-}}\left|x\right|^{b}\cos^{3}\left(\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow b>0$