

Am1c – Tutorato III

Derivate

Venerdì 10 Marzo 2006

Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

Esercizio 1 Mostrare un esempio per ognuno dei seguenti quesiti:

- una funzione continua ma non derivabile in un punto
- una funzione derivabile in un punto la cui derivata non è derivabile
- una funzione il cui limite del rapporto incrementale in un punto esiste ma non è finito
- una funzione il cui limite del rapporto incrementale in un punto non esiste
- una funzione derivabile $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i cui limiti destro e sinistro della derivata, per x che tende a zero, esistono e sono uguali. Come si spiega questo?

Esercizio 2 Sia f definita $\forall x \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Provare che f è costante.

Esercizio 3 Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni derivabili in x_0 . Calcolare $(fgh)'(x_0)$.

Esercizio 4 Calcolare le seguenti derivate utilizzando soltanto le derivate delle funzioni elementari e le opportune regole di derivazione:

- | | | | |
|--|-----------------------------------|--|--|
| (1) $\ln x$ | (2) $x^r \quad r \in \mathbb{R}$ | (3) $\arccos x$ | (4) $\tan x$ |
| (5) $\arctan x$ | (6) $\sin(3x^3 + 4x)$ | (7) $e^x(1 + x^2 + 3x^7)$ | (8) 7^{x^2+4} |
| (9) $\sin(\pi^{\tan x})$ | (10) $x \cdot \ln x \cdot \sin x$ | (11) $e^{\sin(e^x)}$ | (12) $\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ |
| (13) $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)e^{-\cos x}$ | (14) $\ln(x + \sin(\ln x))$ | (15) $e^{x^2+1} \ln(x^2 + 1)$ | (16) $\frac{\sin^2 x + \cos x}{\ln x}$ |
| (17) $\sin\left(\frac{\ln x}{x^3 + 4}\right)$ | (18) $\ln^2(\arcsin x)$ | (19) $\frac{\arctan(x^5 + x^x)}{\ln(2^x)}$ | (20) $\sin(30x^3 - x^7)e^{\tan x}$ |

Esercizio 5 Definiamo le funzioni *seno* e *coseno iperbolico* nel modo seguente:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- a. provare a disegnare il grafico di entrambe le funzioni cercando di individuare eventuali simmetrie (in particolare dire se sono pari e/o dispari)

- b. verificare che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- c. calcolare la derivata del seno e del coseno iperbolico
- d. indicare le loro funzioni inverse rispettivamente con $\sinh^{-1} x$ (*arcoseno iperbolico*) e $\cosh^{-1} x$ (*arcocoseno iperbolico*), calcolare le loro derivate
- e. dimostrare che
- i. $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
 - ii. $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- f. definita $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$, calcolarne la derivata
- g. calcolare le seguenti derivate:

(1) $\sinh(\cosh(\sinh x))$

(2) $\sinh\left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{7^x}\right)$

(3) $e^{\sinh(\arctan x)}$

Esercizio 6 Dire per quale valori dei parametri le seguenti funzioni sono continue e derivabili:

(1)
$$\begin{cases} ax^2 + bx + 3 & x \geq 0 \\ 7e^x - 4 & x < 0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} \frac{4a+b}{x^2+1} & x \geq 1 \\ x^2 + 2x(a+b) - 1 & x < 1 \end{cases}$$