Am1c – Tutorato IV

Uniforme continuità e studio di funzioni

Venerdì 17 Marzo 2006

Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

Esercizio 1 Sia $P(x)=a_n x^n+...+a_1 x+a_0$ tale che $a_n>0 \quad a_0<0$. Dimostrare che tale polinomio ammette almeno due radici reali, una positiva e una negativa.

Esercizio 2 Discutere l'uniforme continuità delle seguenti funzioni negli intervalli indicati:

(1) $e^x \quad (-\infty;1) \quad [1;+\infty)$

(2) $x^3+7x-4 \quad (-4;3) \quad [4;+\infty)$

(3) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x} \quad [1;+\infty) \quad \mathbb{R}$

(4) $x^\alpha \quad \alpha\in\mathbb{R} \quad (-1;1) \quad [1;+\infty)$

(5) $x^\alpha \log^\beta x \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad (0;1) \quad [1;+\infty)$

(6) $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (0;1) \quad (1;+\infty)$

(7) $\frac{\sin x}{x} \quad (0;1) \quad (\pi;+\infty)$

(8) $\arctan x \quad \mathbb{R}$

(9) $x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad (0;1) \quad (-1;0)\cup(0;1)$

(10) $x^2\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) \quad (0;1) \quad [1;2] \quad [1;+\infty]$

Esercizio 3 Studiare il grafico delle seguenti funzioni

(1) $f(x)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

(2) $f(x)=\frac{x^2-2}{x+1}$

(3) $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$

(4) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$

Esercizio 4 Dimostrare che se $x,y\ge 0 \quad p,q>0 \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ allora $xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$

(Suggerimento: considerare la funzione $f(x)=xy-\frac{x^p}{p}...$*)*

Esercizio 5 Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

(1) $\frac{1}{\sin x}\ge 2-2\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \quad x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

(2) $x+\sin x\ge 2(e^x-1) \quad x\ge 0$

(3) $x^x\ge x \quad x\ge 0$