Am1c – Soluzioni Tutorato IV

Uniforme continuità e studio di funzioni

Venerdì 17 Marzo 2006

Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

Esercizio 1 Dato che il polinomio è di grado pari $n \geq 2$ e $a_n > 0$ segue che $\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = +\infty$. Da questo segue che esistono $\alpha < 0 \quad \beta > 0$ tali che $P(\alpha) > 0 \quad P(\beta) > 0$. Ora poiché $P(0) = a_0 < 0$ la tesi segue applicando il teorema di esistenza degli zeri agli intervalli $[\alpha;0] \quad [0;\beta]$.

Esercizio 2 (1) Uniformemente continua nell'intervallo $(-\infty;1)$ in quanto ha derivata limitata. Non è tuttavia uniformemente continua nell'intervallo $[1;+\infty)$: infatti se lo fosse, per il teorema della Farfalla $\exists a,b \in \mathbb{R} : |e^x| \leq a + bx$. Ne segue che per qualche $a,b \in \mathbb{R}$ risulta $\frac{e^x}{a+bx} \leq 1$. Ma poiché $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{a+bx} = +\infty$ questo non è possibile.

(2) Uniformemente continua nell'intervallo $(-4;3)$ in quanto è possibile estenderla ad una funzione continua su $[-4;3]$. Non è tuttavia uniformemente continua in $[4;+\infty)$ poiché non soddisfa il teorema della farfalla.

(3) Uniformemente continua nell'intervallo $[1;+\infty)$ in quanto ha derivata limitata. La funzione è uniformemente continua anche su tutto l'asse reale in quanto è ovviamente uniformemente continua su $(-\infty;-1]$ (ha derivata limitata!) e lo è anche nell'intervallo $[-1;1]$ in quanto è ivi continua.

(4) In $(-1;1)$ la funzione è uniformemente continua per $\alpha \geq 0$ in quanto continua $[-1;1]$ (più precisamente è estendibile per continuità nell'origine nel caso $\alpha = 0$). Se $\alpha < 0$ non risulta uniformemente continua in quanto la funzione ha una discontinuità non eliminabile nell'origine.
In $[1;+\infty)$ la funzione è uniformemente continua per $\alpha \leq 1$ in quanto ha derivata limitata. Tuttavia se $\alpha > 1$ la funzione non è uniformemente continua in quando non è verificato il teorema della farfalla.

(5) Uniformemente continua in $(0;1)$ per $\alpha > 0$ in quanto è estendibile ad una funzione continua su tutto l'intervallo $[0;1]$. Nel caso $\alpha \leq 0$ questo non è possibile quindi non è neanche uniformemente continua. Invece, nell'intervallo $[1;+\infty)$, è uniformemente continua se $\alpha < 0$, in quanto ha un asintoto orizzontale; se $0 \leq \alpha < 1$ è uniformemente continua in quanto ha derivata limitata; se $\alpha = 1$ è uniformemente continua $\forall \beta \leq 0$ in quanto ha derivata limitata, mentre per $\beta > 0$ non lo è in quanto non vale il teorema della farfalla. Infine se $\alpha > 1$ la funzione non è uniformemente continua in quanto non è verificato il teorema della farfalla.

(6) Nell'intervallo $(0;1)$ non è uniformemente continua in quanto non è estendibile per continuità nell'origine. Al contrario in $(1;+\infty)$ è uniformemente continua in quanto ha derivata limitata.

(7) Uniformemente continua in $(0;1)$ perché può essere estesa per continuità negli estremi dell'intervallo. Lo è anche nell'intervallo $(\pi;+\infty)$ in quanto ha derivata limitata.

(8) Uniformemente continua su tutto l'asse reale in quanto ha derivata limitata.

(9) Nell'intervallo $(0;1)$ la funzione è uniformemente continua in quando può essere estesa a una funzione continua in $[0;1]$. Per lo stesso motivo è uniformemente continua in $(-1;0)\cup(0;1)$, infatti si ha $\lim_{x\to 0^-} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=0=\lim_{x\to 0^+} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

(10) In $(0;1)$ è uniformemente continua in quanto estendibile ad una funzione continua su $[0;1]$. In $[1;2]$ è uniformemente continua in quanto è continua su tutto l'intervallo. Infine in $[1;+\infty)$ è uniformemente continua in quanto ha un asintoto orizzontale, infatti $\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)=1$.

Esercizio 3 (1) Essendo un polinomio di quarto grado la funzione è definita su tutto l'asse reale e non ha asintoti. Lo studio del segno della funzione e della derivata prima portano a trovare i seguenti risultati:

$$
\begin{array}{ll}
f(x)<0 & \forall x\in(-2;-1)\cup(1;2) \\
f(x)=0 & x=-2,-1,1,2 \\
f(x)>0 & \forall x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(2;+\infty)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
f'(x)<0 & \forall x\in\left(-\infty;-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\cup\left(0;\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \\
f'(x)=0 & x=-\sqrt{\frac{5}{2}},0,\sqrt{\frac{5}{2}} \\
f'(x)>0 & \forall x\in\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};0\right)\cup\left(\sqrt{\frac{5}{2}};+\infty\right)
\end{array}
$$

Si hanno dunque due minimi $N_1\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};-\frac{9}{4}\right)$ $N_2\left(\sqrt{\frac{5}{2}};-\frac{9}{4}\right)$ ed un massimo $M(0;4)$.

(2) La funzione è definita su tutto l'asse reale escluso il punto $x=-1$ dove si verifica facilmente che ha un asintoto verticale. Inoltre, poiché $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ $n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=-1$, la funzione presenta un asintoto obliquo di equazione $y=x-1$. Lo studio del segno della funzione e della derivata prima portano a trovare i seguenti risultati:

$$
\begin{array}{ll}
f(x)<0 & \forall x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1;\sqrt{2}\right) \\
f(x)=0 & x=-\sqrt{2},\sqrt{2} \\
f(x)>0 & \forall x\in\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)
\end{array}
$$

$$f'(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

Non si hanno dunque punti critici.

(3) La funzione è definita su tutto l'asse reale escluso il punto $x=1$ dove ammette un asintoto verticale. Essa ammette anche un asintoto orizzontale destro di equazione $y=0$. Lo studio del segno della funzione e della derivata prima portano a trovare i seguenti risultati:

$$f(x)<0 \qquad \forall x\in(0;1)$$
$$f(x)=0 \qquad x=0$$
$$f(x)>0 \quad \forall x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$$

$$f'(x)<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Non si hanno dunque punti critici.

(4) La funzione è definita $\forall x\in\mathbb{R}\setminus[-3;0)$. La funzione ammette un asintoto verticale di equazione $x=-3$. Ammette anche un asintoto obliquo destro di equazione $y=x-\frac{3}{2}$ e uno sinistro di equazione $y=\frac{3}{2}-x$. Infatti, ad esempio, calcoliamo l'equazione dell'asintoto destro: $m=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}=1$ $\quad n=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{\frac{x}{x+3}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{x}{x+3}}+1\right)}{\left(\sqrt{\frac{x}{x+3}}+1\right)}=\frac{\frac{-3x}{x+3}}{\sqrt{\frac{x}{x+3}}+1}=-\frac{3}{2}$. In modo analogo si calcola l'equazione di quello sinistro. Lo studio del segno della funzione e della derivata prima portano a trovare i seguenti risultati:

$$f(x)=0 \qquad x=0$$
$$f(x)>0 \quad \forall x\in(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$$

$$f'(x)<0 \qquad \forall x\in\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right)$$
$$f'(x)=0 \qquad x=-\frac{9}{2},0$$
$$f'(x)>0 \quad \forall x\in\left(-\frac{9}{2};-3\right)\cup(0;+\infty)$$

Si hanno dunque due minimi $N_1\left(-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\sqrt{3}\right)$ $\quad N_2(0;0)$.

Esercizio 4 Utilizzando il suggerimento si vede facilmente che derivando la funzione $f(x)=xy-\frac{x^p}{p}$ si ottiene $f'(x)=y-x^{p-1}$ e quindi tale funzione ha un massimo in corrispondenza del punto $x=y^{\frac{1}{p-1}}$. Si ha dunque che $xy-\frac{x^p}{p}\le y^{\frac{1}{p-1}+1}-\frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}}=y^{\frac{p}{p-1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{y^q}{q}$, cioè la tesi.

Esercizio 5 (1) Posto $f(x)=\frac{1}{\sin x}+2\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2$ si ottiene $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ $\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\frac{\pi}{3}$ e $f'(x)\ge 0 \quad \forall x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

(2) Posto $f(x)=x+\sin x-2\left(e^x-1\right)$ si ottiene $f(0)=0$ e $f'(x)\le 0 \quad \forall x\ge 0$.

(3) Posto $f(x)=x^{x-1}$ si ha $f(1)=1$. Se $x>1$ allora $x-1>0$ e quindi $f(x)=x^{x-1}>1$. Analogamente se $x<1$ allora $x-1<0$ e quindi $f(x)=x^{x-1}>1$.