Am1c – Soluzioni Tutorato IIV

Integrali I

Venerdì 21 Aprile 2006

Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

Esercizio 1 Il calcolo dei seguenti integrali si basa sulle seguenti formule:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + k \qquad\qquad \int f^{\alpha-1}(x) f'(x)dx = \frac{f^{\alpha}(x)}{k} + k$$

Otteniamo quindi:

(1) $\int \frac{10x^4 + 12x^3 - 8}{2x^5 + 3x^4 - 8x}dx = \ln|2x^5 + 3x^4 - 8x| + k$

(2) $\int \frac{1}{x \ln x}dx = \ln|\ln x|$

(3) $\int \frac{1}{\tan x}dx = \ln|\sin x| + k$

(4) $\int \frac{1}{\cos x \sin x}dx = \ln|\tan x| + k$

(5) $\int \frac{\sin^8 x}{\tan x}dx = \frac{\sin^9 x}{9} + k$

(6) $\int \frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}dx = \ln|\arcsin x| + k$

(7) $\int \tan^2 x + \tan^4 x dx = \int \tan^2 x\left(1 + \tan^2 x\right)dx = \frac{\tan^3 x}{3} + k$

(8) $\int \frac{\ln(\arctan x)}{\arctan x\left(1+x^2\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\ln(\arctan x)}{\arctan x\left(1+x^2\right)}dx = \frac{1}{2}\ln^2(\arctan x) + k$

Esercizio 2 Ovviamente $\int dx = x + k$. Supponiamo ora che $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ per un n fissato, e mostriamo che è valido per *n+1*. Integrando per parti si ha:

$$\int x^{n+1}dx = \int x^n x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}dx$$

Quindi:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\int x^{n+1}dx = \int x^n x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}x + k$$

Da cui, infine:

$$\int x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}x^{n+2} + k$$

Esercizio 3

(1) $\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cos x dx = \cos^{n-1} x \sin x + \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx =$
$= \cos^{n-1} x \sin x + \int \cos^{n-2} x \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \cos^{n-1} x \sin x - \int \cos^n x dx + \int \cos^{n-2} x dx$

Quindi posto $C_n = \int \cos^n x dx$ si ottiene che:

$$C_n = \frac{\cos^{n-1} x \sin x + C_{n-2}}{2}$$

Ora poiché $C_0 = x + k \quad C_1 = \sin x + k$, utilizzando la formula ricorsiva trovata, si ottiene per ogni *n* la primitiva che avrà come ultimo termine dell'iterazione C_0 se *n* è pari e C_1 se *n* è dispari.

(2) Analogo all'esercizio (1)

(3) $\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + \int 3x^2 \cos x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - \int 6x \sin x dx =$
$= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - \int 6 \cos x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + k$

(4) $\int x^4 e^x dx = x^4 e^x - \int 4x^3 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + \int 12x^2 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - \int 24x e^x dx =$
$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24e^x + k$

(5) $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + k$

(6) $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + k$

(7) $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + k$

(8) $\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = x \ln^2 x - 2x\left(\ln x + 1\right) + k$

Esercizio 4

(1) $F'(x) = 3x^2 \cos\left(x^6\right)$

(2) $F'(x) = \frac{e^{\sin x}}{\sin x} \cos x$