Am1c – Tutorato VIII

Integrali II

Mercoledì 3 Maggio 2006

Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

Esercizio 1 Calcolare i seguenti integrali:

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x+2)} + \dfrac{C}{(x+3)}$ da cui, per il principio di identità dei polinomi si ottinene $A = \dfrac{1}{2}$ $\quad B = -1 \quad$ $C = \dfrac{1}{2}$. Risulta quindi:

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)} - \int \frac{dx}{(x+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+3)} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + k$$

(2) $\dfrac{1}{x^3-3x^2+x-3} = \dfrac{1}{(x^2+1)(x-3)} = \dfrac{Ax+B}{(x^2+1)} + \dfrac{C}{(x-3)}$ da cui $A = -\dfrac{1}{10}$ $\quad B = -\dfrac{3}{10} \quad$ $C = \dfrac{1}{10}$.

Quindi risulta:

$$\int \frac{1}{x^3-3x^2+x-3}dx = -\frac{1}{20}\int \frac{2x}{(x^2+1)}dx - \frac{3}{10}\int \frac{dx}{(x^2+1)} + \frac{1}{10}\int \frac{dx}{(x-3)} =$$

$$= -\frac{1}{20}\ln(x^2+1) - \frac{3}{10}\arctan x + \frac{1}{10}\ln|x-3| + k$$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + k$

(4) $\dfrac{x-1}{4x^3-x} = \dfrac{x-1}{x(2x+1)(2x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(2x+1)} + \dfrac{C}{(2x-1)}$ da cui $A = 1 \quad B = -\dfrac{3}{2} \quad C = \dfrac{1}{2}$ e quindi:

$$\int \frac{x-1}{4x^3-x}dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(2x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(2x-1)} = \ln|x| - \frac{3}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + k$$

(5) $\dfrac{6x}{x^2+x-2} = \dfrac{6x}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{(x-1)} + \dfrac{B}{(x+2)}$ da cui $A = 2 \quad B = 4$ e quindi:

$$\int \frac{6x}{x^2+x-2}dx = 2\int \frac{dx}{(x-1)} + 4\int \frac{dx}{(x+2)} = 2\ln|x-1| + 4\ln|x+2| + k$$

(6) $\dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{(x+1)}$ da cui $A = -1 \quad B = 1 \quad C = 1$ e quindi:

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{(x+1)} = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + k$$

(7) Eseguendo la divisione tra polinomi si ottiene:

$$\int \frac{x^5+4}{x^2+3x+2}dx = \int \left(x^3-3x^2+7x-15\right)dx + \int \frac{31x+34}{x^2+3x+2}dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 15x + \int \frac{31x+34}{x^2+3x+2}dx$$

Ora poiché $\frac{31x+34}{x^2+3x+2} = \frac{31x+34}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$ da cui $A=3 \quad B=28$ e quindi:

$$\int \frac{31x+34}{x^2+3x+2} = 3\int \frac{dx}{(x+1)} + 28\int \frac{dx}{(x+2)} = 3\ln|x+1| + 28\ln|x+2| + k$$. Concludendo:

$$\int \frac{x^5+4}{x^2+3x+2}dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 15x + 3\ln|x+1| + 28\ln|x+2| + k\,.$$

(8) $\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{Cx+D}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}$ da cui si ottiene che $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad B = \frac{1}{2} \quad C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad D = \frac{1}{2}$. Otteniamo quindi:

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}dx =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}dx + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}dx + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right) + k$$

Esercizio 2 (1) Posto $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$ si ha $F\left(-x\right)=\int_0^{-x} f\left(t\right)dt$ che con la sostituzione t=-s diventa

$$F\left(-x\right)=\int_0^{-x} f\left(t\right)dt=-\int_0^{x} f\left(-s\right)ds=-\int_0^{x} f\left(s\right)ds=-F\left(x\right).$$

(2) Analogamente al punto (1).

Esercizio 3 Risulta evidente che $f\left(x\right)=\sin x+1$ è periodica mentre la sua funzione integrale non lo è. Una condizione necessaria e sufficiente affinché questo avvenga è che la funzione abbia media nulla, cioè $\int_x^{x+T} f\left(t\right)dt=0$. Infatti se $\int_0^x f\left(t\right)dt$ è T-periodica allora $\int_0^x f\left(t\right)dt=\int_0^{x+T} f\left(t\right)dt$ e quindi $0=\int_0^{x+T} f\left(t\right)dt-\int_0^{x} f\left(t\right)dt=\int_x^{x+T} f\left(t\right)dt$ e analogamente segue il viceversa.

Esercizio 4 Integrando per parti si ottiene:

(1) $L_n=\int \ln^n x dx=x\ln^n x-n\int x^{n-1}e^x dx=x^n e^x-nL_{n-1}$

(2) $E_n=\int x^n e^x dx=x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx=x^n e^x-nE_n$