

# SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SU CONTINUITA' E PUNTI DI DISCONTINUITA'

## ESERCIZIO 1

(a)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = ax_0 + b$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = c$ , sapendo che una funzione é continua in un punto  $x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , allora  $f$  sará continua se  $ax_0 + b = c$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan x = +\frac{\pi}{2}$ , quindi non é possibile prolungare la funzione per continuitá in 0 perché in tale punto il limite non esiste.

(c) Sia  $x_0$  un punto di  $\mathbb{R}$  qualunque, e mostriamo che il limite destro (analogamente il limite sinistro), non esiste. Per assurdo supponiamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ , e sia positivo (non si perde di generalitá). Allora esiste  $\delta > 0$  tale che per  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , si ha  $|f(x) - l| < \frac{1}{2}$ . Se il punto  $x$  in questione fosse razionale, quindi tale che  $f(x) = 0$ , si avrebbe  $|f(x) - l| = |-l| = l < \frac{1}{2}$  (\*). Invece se  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , si avrebbe

$$|f(x) - l| = |1 - l| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow l < \frac{3}{2} \text{ e } l > \frac{1}{2},$$

e questi valori di  $l$  sono incompatibili con (\*). Quindi il limite destro non esiste e la funzione non é continua in alcun punto di  $\mathbb{R}$ .

(d)  $|x \sin \frac{1}{x}| < |x|$ , quindi  $\lim_{x \rightarrow 0} |x \sin \frac{1}{x}| < |x| \rightarrow 0$ . Definendo  $f(0) = 0$ , si rende la funzione continua.

(e) La funzione potrebbe avere una discontinuitá in 0. Calcoliamone il limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ , quindi definendo  $f(0) = 0$  si prolunga la funzione per continuitá anche in 0.

(f) Poiché  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ , ponendo  $f(0) = 1$ , rendiamo la funzione continua

in tutto  $\mathbb{R}$ .

## ESERCIZIO 2

Valutiamo limiti destro e sinistro in  $x = n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow n^-} |[x]|^{\{x\}} = \lim_{x \rightarrow n^-} |n-1|^{\{x\}} = n-1$ .

$\lim_{x \rightarrow n^+} |[x]|^{\{x\}} = \lim_{x \rightarrow n^+} n^{\{x\}} = n^0 = 1$ .

Si deduce che la funzione é discontinua  $\forall x \in \mathbb{N}$ , tranne che in  $x = 2$ , infatti i limiti destro e sinistro coincidono, quindi in 2 la funzione é continua.

## ESERCIZIO 3

Essendo  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = +\infty$  e  $P(0) = a_0 < 0$ , la funzione  $P(x)$  deve assumere tutti i valori tra  $a_0 < 0$  e  $+\infty$  perché é continua, quindi si annulla almeno una volta in  $(-\infty, 0]$  e almeno una volta in  $[0, +\infty)$ .

## ESERCIZIO 4

Supponiamo che l' intervallo sia finito, gli altri casi si possono trattare nello stesso modo.

Sia  $M$  tale che  $M > f(\frac{a+b}{2})$ , tale numero  $M$  sicuramente esiste perché la funzione é continua nell' intervallo, assume il valore  $+\infty$  solo agli estremi, inoltre scegliamo il punto medio di  $(a, b)$  solo per individuare un punto interno, ma se ne può scegliere uno qualunque. Per ipotesi sappiamo che  $\exists \delta(M)$  tale che:

$$f(x) > M \text{ se } x \in (a, a + \delta) \cup (b - \delta, b),$$

infatti , poiché agli estremi  $f(x)$  tende a  $+\infty$ , in un intorno opportuno degli estremi possiamo supporre che assuma valori comunque grandi. D' altra parte, per il Teorema di Weierstrass,  $f$  ammette minimo sui compatti, quindi  $\exists x_0 \in [a + \delta, b - \delta]$  tale che

$$(*) f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in [a + \delta, b - \delta].$$

In particolare, poiché  $\frac{a+b}{2} \in [a+\delta, b-\delta]$ , si ha anche  $f(\frac{a+b}{2}) \geq f(x_0)$ . Allora si ha:

$$(**) f(x_0) \leq f(\frac{a+b}{2}) < M < f(x) \quad \forall x \in (a, a + \delta) \cup (b - \delta, b).$$

Da (\*), (\*\*) segue che  $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in (a, b)$ .