Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007
Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.2 del 13/10/2006

1. Risolvere le seguenti disequazioni.

   1.1) $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0 \vee x > 1\}$

   1.2) $\{x \in \mathbb{R} | x < 0 \vee x \geq 2\}$

   1.3) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 3\}$

   1.4) $\left\{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{5}{3} \vee \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{17}{5} \vee x \geq 5\right\}$

   1.5) $\left\{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{1}{e^2} \vee x \geq \sqrt{e}\right\}$

   1.6) $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   1.7) $\left\{x \in \mathbb{R} | 0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} | \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup$
   $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   1.8) $\left\{x \in \mathbb{R} | 0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} | \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup$
   $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. Sia $\mathbb{N}^2 = \{(n_1, n_2) | n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$, sia $\mathcal{R}$ una relazione così definita:

   $$(n,k)\mathcal{R}(m,h) \Leftrightarrow n + h = m + k.$$

   Dire di quali proprietà gode e se è una relazione d'equivalenza. Trovare le classi di equivalenza.
   Le proprietà da verificare sono: riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale.

   (i) Riflessiva: $(n,k)\mathcal{R}(n,k) \Leftrightarrow n + k = n + k$, quindi è riflessiva.

   (ii) Simmetrica: $(n,k)\mathcal{R}(m,h) \Leftrightarrow n + h = m + k \Leftrightarrow m + k = n + h \Leftrightarrow (m,h)\mathcal{R}(n,k)$, quindi è simmetrica.

   (iii) Antisimmetrica: $(n,k)\mathcal{R}(m,h) \wedge (m,h)\mathcal{R}(n,k) \not\Rightarrow (n,k) = (m,h)$, infatti si può vedere che $(1,2)\mathcal{R}(2,3)$ e che $(2,3)\mathcal{R}(1,2)$ ma $(1,2) \neq (2,3)$.

   (iv) Transitiva: dobbiamo vedere se $(n,k)\mathcal{R}(m,h) \wedge (m,h)\mathcal{R}(j,l) \Rightarrow (n,k)\mathcal{R}(j,l)$.
   $(n,k)\mathcal{R}(m,h) \Leftrightarrow n + h = m + k,\ (m,h)\mathcal{R}(j,l) \Leftrightarrow m + l = j + h \ \Rightarrow$ (sommando membro a membro le due uguaglianze) $n + h + m + l = m + k + j + h \Leftrightarrow n + l = j + k \ \Rightarrow (n,k)\mathcal{R}(j,l)$, quindi è transitiva.

   (v) Totale: $\forall\,(n,k),(m,h) \in \mathbb{Z}^2 \not\Rightarrow (n,k)\mathcal{R}(m,h)$ e/o $(m,h)\mathcal{R}(n,k)$, infatti $(1,1)\not\mathcal{R}(2,3)$, quindi non è totale.

   $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza poiché gode delle proprietà (i), (ii) e (iv). Le classi d'equivalenza sono:

   $$[(n,k)] = \begin{cases} \{(n + h - k, h) | h \in \mathbb{N}\} & \text{se } n \geq k \\ \{(m, m + k - n) | m \in \mathbb{N}\} & \text{se } n < k \end{cases}$$

3. Dire quali delle seguenti sono relazioni d'equivalenza in $\mathbb{R}$ e stabilirne le classi:

   3.1) (i) Riflessiva: $xx = x^2 \geq 0 \Rightarrow x \sim x$, quindi gode della propritá riflessiva.
   (ii) Simmetrica: $x \sim y \Rightarrow xy \geq 0 \Leftrightarrow yx \geq 0 \Rightarrow y \sim x$, quindi gode della proprietà simmetrica.
   (iii) Transitiva: $x \sim y \wedge y \sim z \not\Rightarrow x \sim z$: infatti $1 \sim 0$ e $0 \sim -1$ ma $1 \not\sim -1$, quindi non vale la proprietà transitiva.

   Non è quindi una relazione d'equivalenza.

   3.2) È una relazione d'equivalenza e $\forall a \in \mathbb{R}$ $[a] = \{a\}$.

   3.3) Vale la proprietà riflessiva ma non vale la simmetrica: non occorre verificare la transitiva, possiamo già dire che non è una relazione d'equivalenza.

   3.4) È una relazione d'equivalenza e $\forall a \in \mathbb{R}$ $[a] = \left\{a, -\frac{2}{a}\right\}$.

   3.5) È una relazione d'equivalenza e $\forall a \in \mathbb{R}$ $[a] = \{a + r,\ r \in \mathbb{Q}\}$.

   3.6) È una relazione d'equivalenza e $\forall a \in \mathbb{R}$ $[a] = \mathbb{R}$.

   3.7) Non è una relazione d'equivalenza.

   3.8) È una relazione d'equivalenza e $\forall a \in \mathbb{R}$ $[a] = \{\pm a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Dire se le seguenti sono relazioni d'equivalenza in $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$:

   4.1) È una relazione d'equivalenza.

   4.2) È una relazione d'equivalenza.

5. Sia $\mathbb{Z}^2 = \{(z_1, z_2) | z_1 \in \mathbb{Z}, z_2 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$. Dire se le seguenti sono relazioni d'equivalenza e stabilirne le classi.

   5.1) Non è una relazione d'equivalenza.

   5.2) È una relazione d'equivalenza e $\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ $[(x_1, y_1)] = \{(ax_1, ay_1),\ a \in \mathbb{Z}\}$.