Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007
Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.3 del 17/10/2006

1. Trovare, se esistono, estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi, specificando se sono, rispettivamente, massimo e minimo.

   A) Notiamo che per $n = 0$ si ha $x = -\frac{3}{2}$, possiamo notare invece che per $n \geqslant 1$ $\frac{2n+3}{3n-2} > 0$, questo implica che $-\frac{3}{2} \leqslant x \ \forall x \in A$ e quindi poiché $-\frac{3}{2} \in A$ è $\inf A = \min\{x \in A\} = -\frac{3}{2}$.
   Possiamo vedere che $\forall n \geqslant 1$ $x_n \geqslant x_{n+1}$, infatti: $\frac{2n+3}{3n-2} \geqslant \frac{2(n+1)+3}{3(n+1)-2}$ $\forall n \geqslant 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 13 \geqslant 0$ $\forall n \geqslant 1$, questo ci dice che per $n = 1$ $x = 5$ è tale che $5 \geqslant x \ \forall x \in A$ ed è quindi $\sup A = \max\{x \in A\} = 5$.

   B) Possiamo notare che se $n \geqslant 2$ $\frac{2n+1}{n^2-2} > 0$, mentre per $n = 0$ $x = -\frac{1}{2}$ e per $n = 1$ $x = -3$, quindi $-3 \leqslant x \ \forall x \in B \Rightarrow \inf B = \min\{x \in B\} = -3$.
   Possiamo far vedere che gli elementi di B decrescono col crescere di n, $n \geqslant 2$ ovvero: $\frac{2n+1}{n^2-2} \geqslant \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2-2}$ $\forall n \geqslant 2$, quindi il valore di x per $n = 2$ è il valore massimo: $\sup B = \max\{x \in B\} = \frac{5}{2}$.

   C) Consideriamo separatamente gli elementi positivi e quelli negativi e cerchiamo l'estremo superiore tra i positivi, l'estremo inferiore tra i negativi. $\inf C = \min\{x \in C\} = -2$, $\sup C = \max\{x \in C\} = 1$.

   D) $\inf D = \min\{x \in D\} = \frac{1}{3}$, l'insieme non è superiormente limitato quindi è $\sup D = +\infty$: va quindi dimostrato che $\forall M \ \exists x \in D : x > M$, ovvero $\forall M \ \exists n : x_n > M$.

   E) $\sup E = \max\{x \in E\} = \frac{1}{4}$, $\inf E = \min\{x \in E\} = -\frac{1}{7}$.

   F) $\inf F = \min\{x \in F\} = 0$, $\sup F = \max\{x \in F\} = \frac{3 \log 3}{10}$.

   G) $\inf G = \min\{x \in G\} = -3$, $\sup G = \max\{x \in G\} = \frac{6}{7}$.

   H) $\inf H = \min\{x \in H\} = 0$, $\sup H = +\infty$.

   I) $\sup I = +\infty$, $\inf I = \min\{x \in I\} = -1$.

2. Dimostrare che se $X, Y \subset \mathbb{R}$, $X, Y \neq \emptyset$ e $X + Y = \{x + y | x \in X, y \in Y\}$, allora:

   (i) $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$: dimostriamo prima che vale il $\leqslant$, poi che vale il $\geqslant$, il che implica l'uguaglianza.

   - $\sup(X + Y) \leqslant \sup X + \sup Y$: sappiamo che $x \leqslant \sup X \ \forall x \in X$ e che $y \leqslant \sup Y \ \forall y \in Y$, quindi $x + y \leqslant \sup X + \sup Y \ \forall x \in X, y \in Y$, ciò implica che $\sup X + \sup Y$ è un maggiorante dell'inseme $X + Y$ e poiché $\sup(X + Y)$ è il più piccolo dei maggioranti si ha la disuguaglianza $\sup(X + Y) \leqslant \sup X + \sup Y$.
   - $\sup(X+Y) \geqslant \sup X+\sup Y$: sappiamo, per definizione di estremo superiore, che $\forall \epsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in X, \bar{y} \in Y : \bar{x} > \sup X - \frac{\epsilon}{2}, \ \bar{y} > \sup Y - \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow x+y > \sup X + \sup Y - \epsilon$ e poiché $\sup(X + Y)$ è un maggiorante di $x + y \ \forall x \in X, y \in Y$, in particolare è $\sup X + Y \geqslant \bar{x} + \bar{y} \Rightarrow \sup(X + Y) > \sup X + \sup Y - \epsilon \ \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \sup(X + Y) \geqslant \sup X + \sup Y$.

   (ii) $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$: si procede in maniera analoga.

3. Dimostrare che se $X, Y \subset \mathbb{R},\ X, Y \neq \emptyset,\ X \subset Y$, allora:

$$\inf Y \leqslant \inf X \leqslant \sup X \leqslant \sup Y.$$

Ovviamente è $\inf X \leqslant \sup X$, inoltre $\sup Y$ è un maggiorante per Y e poiché $X \subset Y$ è anche un maggiorante per gli elementi di X, ma $\sup X$ è il più piccolo dei maggioranti di $X \Rightarrow \sup X \leqslant \sup Y$; $\inf Y$ essendo un minorante per Y è anche minorante degli elementi di X, poiché $X \subset Y$, ma $\inf X$ è il più grande dei minoranti di $X \Rightarrow \inf Y \leqslant \inf X$.

4. Dimostrare che se $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \emptyset,\ X_t = \{tx | x \in X, t \in \mathbb{R}^+\}$, allora:

   (i) $\sup X_t = t \sup X$: come sopra dimostriamo che valgono sia il $\leqslant$ che il $\geqslant$.

   - $\sup X_t \leqslant t \sup X$: sappiamo che $x \leqslant \sup X\ \forall x \in X \Rightarrow tx \leqslant t \sup X\ \forall x \in X \Rightarrow t \sup X$ è un maggiorante dell'insieme X_t e poiché $\sup X_t$ è il più piccolo dei maggioranti di X_t è $\sup X_t \leqslant t \sup X$.
   - $\sup X_t \geqslant t \sup X$: t è fissato e sappiamo che $\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{x} \in X :\ \bar{x} > \sup X - \frac{\epsilon}{t} \Rightarrow t\bar{x} > t \sup X - \epsilon$ e poiché $\sup X_t$ è un maggiorante di $tx\ \forall x \in X$ è $\sup X_t \geqslant t\bar{x}$ e quindi $\sup X_t > t \sup X - \epsilon\ \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \sup X_t \geqslant t \sup X$.

   (ii) $\inf X_t = t \inf X$: si procede in maniera analoga.