Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007
Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.5 del 31/10/2006

Esercizio 1. Trovare i punti interni, i punti di frontiera e i punti di accumulazione dei seguenti insiemi, dire se sono aperti, chiusi, né aperti né chiusi.

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 < -x\} \qquad B = (-\infty, 0]$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \tfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \qquad D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (2n-1, 2n)$$

$$E = \mathbb{Q} \qquad F = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \tfrac{2n+1}{3n^2+2}\right\}$$

Esercizio 2. Con il principio d'induzione, dimostrare le seguenti:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

3) $n! \geqslant 2^{n-1}$

4) $n^n \geqslant n!$

5) $2^n > 10n \quad (n \geqslant 6)$

6) $2^n \geqslant n^2 \quad (n \geqslant 4)$

7) $(1+a)^n \geqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2 \quad a > 0$

8) $(1+a)^n \geqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^3 \quad a \geqslant -1$

Esercizio 3. Dimostrare che, se $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sono tali che $0 \leqslant \mu_1 \leqslant 1 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ si ha

$$(1-\mu_1)(1-\mu_2)\cdots(1-\mu_n) \geqslant 1 - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_n).$$

Esercizio 4. Per $n \in \mathbb{N}$ si definisca $n!!$ nel modo seguente:

$$1!! = 1 \quad 2!! = 2 \quad (n+2)!! = (n+2)n!!.$$

Trovare un'espressione esplicita per $n!!$. Dimostrare che risulta $(2n)!! = 2^n n!$.

Esercizio 5. Dimostrare che se A è un insieme con N elementi, $\mathcal{P}(A)$ ha 2^N elementi.