Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007
Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.5 del 31/10/2006

Esercizio 1. Trovare i punti interni, i punti di frontiera e i punti di accumulazione dei seguenti insiemi, dire se sono aperti, chiusi, né aperti né chiusi.

- Vediamo esplicitamente qual è l'insieme risolvendo la disequazione: otteniamo che $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0\}$. Troviamo i punti interni: $\forall -1 < x < 0$ sia $\epsilon > 0$: $\epsilon \leqslant \min\{d(x,-1), d(x,0)\} \Rightarrow I = (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A \Rightarrow \overset{\circ}{A} = A$, questo dimostra che A è aperto. Cerchiamo ora la frontiera di A: $\forall \epsilon > 0 \quad I = (-1-\epsilon, -1+\epsilon)$ contiene sia punti di A che di A^C, anche la famiglia di intorni circolari $J = (0-\epsilon, 0+\epsilon)$ $\forall \epsilon > 0$ contiene sempre punti di A e di A^C, quindi $\partial A = \{-1, 0\}$. Per quanto riguarda i punti d'accumulazione, ogni punto $\bar{x} \in \overset{\circ}{A}$ è d'accumulazione perché se così non fosse $\exists\, I : \forall x \in I \setminus \{\bar{x}\}\ x \in A^C$ ($\bar{x}$ è un punto isolato) $\Rightarrow$ ogni intorno di $\bar{x}$ conterrebbe punti di A^C e quindi $\bar{x} \in \partial A$ contro l'ipotesi. Facciamo vedere ora che anche -1 e 0 sono punti d'accumulazione. $\forall \epsilon > 0 \quad I = (-1-\epsilon, -1+\epsilon) : \quad A \cap I \neq \emptyset$: infatti $\forall \ -1 < x < -1+\epsilon \in I$; $\forall \epsilon > 0 \quad J = (0-\epsilon, 0+\epsilon) : \quad A \cap I \neq \emptyset$: infatti $\forall\ 0-\epsilon < x < 0 \in I$; si vede facilmente che un punto di $\overset{\circ}{A^C}$ non può essere d'accumulazione (visto che esiste un intorno tutto contenuto in A^C che quindi non contiene punti di A), quindi $\mathcal{D}A = [-1, 0]$.

- $\overset{\circ}{B} = (-\infty, 0)$, $\partial B = \{0\}$, $\mathcal{D}B = (-\infty, 0]$, si vede che B è chiuso essendo $\overline{B} = B \cup \mathcal{D}B = B$.

- $\overset{\circ}{C} = \emptyset$, $\partial C = C \cup \{0\}$, $\mathcal{D}B = \{0\}$, C non è né aperto né chiuso: infatti non è aperto poiché non ha punti interni e non è chiuso poiché il complementare non è aperto. Notate che questo è un esempio di come non sempre gli insiemi costituiti da punti isolati siano chiusi, questo succede perché si accumulano vicino lo 0.

- $\overset{\circ}{D} = D$, $\partial D = \mathbb{N}^+$, $\mathcal{D}D = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}[2n-1, 2n]$, D è aperto essendo uguale al suo interno.

- $\overset{\circ}{E} = \emptyset$, $\partial E = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}E = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ non è né aperto né chiuso.

- $\overset{\circ}{F} = \emptyset$, $\partial F = F \cup \{0\}$, $\mathcal{D}F = \{0\}$, F non è né aperto né chiuso.

Esercizio 2. Con il principio d'induzione, dimostrare le seguenti:
Mostro la risoluzione solo per il numero 1), gli altri si risolvono in maniera analoga.

- Dimostriamo che la relazione è vera per la base d'induzione $n = 1$ (non è detto che la base sia sempre questa, per esempio nell'esercizio 5) si usa, come base, $n = 6$): $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$.
- Assumiamola vera per n e dimostriamola per $n + 1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k^1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{vale per } n}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2 \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

Esercizio 3. Dimostrare che, se $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sono tali che $0 \leqslant \mu_1 \leqslant 1$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ si ha

$$(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \cdots (1 - \mu_n) \geqslant 1 - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_n).$$

Lo dimostriamo per induzione sul numero di μ_i.

- Base $n = 1$: $(1 - \mu_1) \geqslant 1 - (\mu_1)$.
- Vera per n dimostriamola per $n + 1$: $(1 - \mu_1) \cdots (1 - \mu_n)(1 - \mu_{n+1}) \overset{\text{vale per } n}{\geqslant} (1 - (\mu_1 + \ldots + \mu_n))(1 - \mu_{n+1}) = 1 - (\mu_1 + \ldots + \mu_n) - \mu_{n+1} + \underbrace{\mu_{n+1}(\mu_1 + \ldots + \mu_n)}_{\geqslant 0} \geqslant 1 - (\mu_1 + \ldots + \mu_n + \mu_{n+1})$.

Esercizio 4. Per $n \in \mathbb{N}$ si definisca $n!!$ nel modo seguente:

$$1!! = 1 \quad 2!! = 2 \quad (n+2)!! = (n+2)n!!.$$

Trovare un'espressione esplicita per $n!!$. Dimostrare che risulta $(2n)!! = 2^n n!$.
Espressioni esplicite per il doppio fattoriale sono:
n dispari $\quad n(n-2)(n-4) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$
n pari $\quad n(n-2)(n-4) \cdots 4 \cdot 2$
Il risultato lo si può dimostrare per induzione.

Esercizio 5. Dimostrare che se A è un insieme con N elementi, $\mathcal{P}(A)$ ha 2^N elementi.
Lo dimostriamo per induzione:

- base $n = 1$: se $\sharp A = 1 \quad A = \{x\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, x\}$ e $\sharp\mathcal{P}(A) = 2 = 2^1$;
- vera per $n = N$: sia A un insieme con $N + 1$ elementi e sia $\bar{x}$ uno qualsiasi di essi, sia $B = A \backslash \{\bar{x}\}$, sappiamo che $\sharp\mathcal{P}(B) = 2^N$, gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ sono quelli di $\mathcal{P}(B)$ (che ha cardinalità 2^N) insieme a tutti i possibili sottoinsiemi di B a cui si aggiunge $\bar{x}$ (la cardinalità di questi sottoinsiemi è quindi 2^N), quindi $\sharp\mathcal{P}(A) = 2 \cdot 2^N = 2^{N+1}$.