Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007
Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.8 del 1/12/2006

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\sqrt[n]{2n^5+1} = \sqrt[n]{n}^5 \sqrt[n]{2+\frac{1}{n^5}}$, quindi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n^5+1} = 1$.

2) Moltiplicate numeratore e denominatore per $\sqrt{n+1}+n\sqrt{n-1}$, studiando poi il grado si ha $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1}-n\sqrt{n-1})\sqrt{n^3+1} = -\infty$.

3) Possiamo dividere numeratore e denominatore per $(n+1)^5$ e si ha $\frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5} = \frac{\frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5}}{1+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5}$, il denominatore tende a 2, sviluppando $(n+1)^6-(n-1)^6$ si ha (al numeratore) $\frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5} = \frac{12n^5+4n^3+12n}{(n+1)^5}$ e quindi il numeratore tende a 12; quindi $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5} = 6$.

4) Moltiplicate numeratore e denominatore per n^3, in questo modo al denominatore si ha un limite notevole che sappiamo tendere a $\frac{1}{2}$. Al numeratore abbiamo $n^3\big(\ln(1+n+n^3)-3\ln n\big) = n^3 \ln\frac{1+n+n^3}{n^3} = \ln\left(\frac{1+n+n^3}{n^3}\right)^{n^3}$, abbiamo che $\left(\frac{1+n+n^3}{n^3}\right)^{n^3} > \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2 n}$, sappiamo che $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = +\infty$ e per i carabinieri $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n+n^3)-3\ln n}{n\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)} = +\infty$.

5) Abbiamo che $0 < \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n} = \sqrt[2n]{\frac{n!}{n^{2n}}} = \sqrt[2n]{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\frac{2}{n}\frac{1}{n}}\sqrt[2n]{\frac{1}{n^n}} \leqslant \sqrt[2n]{2^n}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$, quindi per il teorema dei carabinieri $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n} = 0$.

6) Considerate $\left(\sqrt[3]{8+\sin 2^{1/n}}-2\right)$ e riscrivetelo come $(a-b) = \frac{(a^3-b^3)}{(a^2+2ab+b^2)}$, considerate che per n grande $\sin 2^{\frac{1}{n}} \in (\sin 1, \sin 1+\epsilon)$, quindi $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[3]{8+\sin 2^{1/n}}-2\right) = +\infty$.

7) $\lim_{n\to+\infty} [(\sqrt{n})^n - 3^n] = +\infty$.

8) Rapporto di limiti notevoli, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3n+2}{n^2}} = 1$.

9) Non esiste: infatti è una successione di 2 e 0.

10) Sviluppate la potenza del binomio, $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^4\right) = 8$.

11) $\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1} = 2\left(1+\frac{n}{n-1}\right)\left(1+\frac{n}{n-2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{2}\right)(1+n)$, quindi $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^4\right) = +\infty$.

12) Abbiamo che $2\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}} = 2\pi n\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}}$ e $1 < \sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}} < 1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}$ e per i carabinieri $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}} = 1$ e quindi $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right) = 0$.

13) Utilizzate il teorema di Cesaro

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = L.$$

Si ha che $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\binom{3n}{2n}} = \frac{27}{4}$.

14) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\binom{3n}{n}} = \frac{27}{4}$.

15) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n\sin n}{1+n^2+n} = 1$.

16) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^5+1}-\sqrt{n}} = 0$.