

3. SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Esercizio 1

(a) $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$

P_1 è vera, infatti per $n = 1$, $2^0 + 2^1 = 3 = 2^{1+1} - 1$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1} :

$$(2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1} .

(b) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Verifichiamo $P_1 : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1} :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1} .

(c) se $a \geq -1$, $(1+a)^n \geq 1+na$

Verifichiamo $P_1 : 1+a = 1+a$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1} :

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+a(n+1)+na^2 \geq 1+a(n+1).$$

L'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che $na^2 \geq 0$. Abbiamo ottenuto P_{n+1} .

(d) $n! \geq 2^{n-1}$

Verifichiamo $P_1 : 1 \geq 1$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1} :

$$(n+1)! = n!(n+1) \geq 2^{n-1}(n+1) \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1} .

(e) se $a \neq 1$, $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Verifichiamo $P_1 : \sum_{k=0}^1 a^k = a^0 + a^1 = 1+a$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1} :

$$\sum_{k=0}^{n+1} = a^0 + a^1 + \dots + a^n + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1} .

Esercizio 2

Riscriviamo la disuguaglianza come $x^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{x-1}{n}$, ovvero $x \leq \left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n$. Grazie alla disuguaglianza di Bernoulli si ha:

$$\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{x-1}{n} = x.$$

Esercizio 3

Ovviamente un numero pari si scrive come multiplo intero di 2, quindi la nostra tesi é dimostrare che $n + n^2 = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Verifichiamo P_1 : $1 + 1 = 2$ é un numero pari. Suppongo vera P_n , cioè che $n + n^2$ sia pari e dimostro P_{n+1} .

$$(n+1) + (n+1)^2 = n+1 + n^2 + 2n+1 = (n+n^2) + 2n+2$$

poiché per ipotesi $n + n^2$ é pari, il numero $(n + n^2) + 2n + 2$ é anch' esso pari, e la tesi é dimostrata.