SOLUZIONI DELLA SIMULAZIONE DEL SECONDO ESONERO DI AM1

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

1) Abbiamo che per $n \geqslant 4$ $\quad 0 \leqslant \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{11}{12}\right)^n$ e quindi, per il teorema dei carabinieri, $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{n}\right)^n = 0$; poi $n\sin\frac{3}{2n} = \frac{3}{2}\frac{2n}{3}\sin\frac{3}{2n}$ e quindi usando il limite notevole $\lim_{n\to+\infty} n\sin\dfrac{1}{n} = 1$ abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} n\sin\dfrac{3}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\dfrac{3}{2}\dfrac{2n}{3}\sin\dfrac{3}{2n} = \dfrac{3}{2}$. Riassumendo:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^n n\sin\frac{3}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{3}{2n} = 0\cdot\frac{3}{2} = 0.$$

2) Abbiamo che $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e sappiamo che $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, quindi $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1$ e $\lim_{n\to+\infty}\arctan\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right) = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Riassumendo:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\arctan\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$
$$= 0\cdot\frac{\pi}{4} = 0.$$

Esercizio 2. Studiare il comportamento delle seguenti serie al variare del parametro reale x:

1) Abbiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^2}{\log n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^2}{2\log n}$, e questa è una serie a segni alterni del tipo $\sum(-1)^n a_n$ e per il criterio di Leibniz converge se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ed è $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2}{\log n^2} = 0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$, quindi per Leibniz la serie data converge $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

2) Poiché la x è presente solo nel seno, per la periodicità, valutiamo la convergenza sull'intervallo $[0,2\pi]$ e poi la estendiamo. Analizziamo la convergenza assoluta della serie: è $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)^{n+3}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{2\sin x+1}{2}\right|^{n+3}$, questa serie geometrica converge se $\left|\frac{2\sin x+1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < \sin x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{5}{6}\pi < x \leqslant 2\pi$. Per $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5}{6}\pi$ $\quad \frac{2\sin x+1}{2} \geqslant 1$ e quindi $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)^{n+3}$ non può convergere perché è violata la condizione necessaria per la convergenza. Riassumendo, nell'intervallo $[0,2\pi]$ la serie converge per $0\leqslant x<\frac{\pi}{6}\vee\frac{5}{6}\pi<x\leqslant 2\pi$, quindi converge per $0+2k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee\frac{5}{6}\pi+2k\pi<x\leqslant 2\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Calcolare massimo e minimo limite della seguente successione:
Possiamo distinguere inizialmente tra n pari e n dispari per farci un'idea. Si ha:

$$\begin{array}{ll} n \text{ pari} & a_{2n} = \frac{2}{\pi}\arctan(2n) \to 1 \\ n \text{ dispari} & a_{2n+1} = -\frac{2}{\pi}\arctan(2n+1) \to -1 \end{array}$$

Quindi dobbiamo mostrare che $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ e che $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$.
Sappiamo che $\frac{2}{\pi}\arctan n < 1\ \forall\, n$ e che $-\frac{2}{\pi}\arctan n > -1\ \forall\, n$, quindi $\forall\, x \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R}$ sono maggioranti definitivi, così come $\forall\, x \leqslant -1,\ x \in \mathbb{R}$ sono minoranti definitivi.
Ora sia $\epsilon > 0$, consideriamo $y = 1 - \epsilon$, sappiamo che $\exists\, n_0 :\ \forall\, n > n_0 \quad \arctan n \geqslant \frac{\pi}{2} - \nu,\ \nu > 0 \quad \Rightarrow \frac{2}{\pi}\arctan n \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}\nu$; prendendo $n_0 :\ \frac{2}{\pi}\nu < \epsilon$ abbiamo che $\forall\, n$ pari, $n \geqslant n_0 \quad \frac{2}{\pi}\arctan n \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}\nu > 1 - \epsilon = y \quad \Rightarrow\ y < 1$ non è un maggiorante definitivo e quindi l'estremo inferiore dell'insieme dei maggioranti definitivi è 1, in altre parole $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.
Si può fare una dimostrazione analoga per far vedere che $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$.

Esercizio 4. Dimostrare, usando la definizione di limite, che:
$\left|\frac{n^2+1}{3n^2+n-2} - \frac{1}{3}\right| = \frac{|5-n|}{3(3n^2+n-2)}$, se $n \geqslant 5$ abbiamo che $\frac{|5-n|}{3(3n^2+n-2)} \leqslant \frac{n-5}{n^2} \leqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leqslant \epsilon$ se $n \geqslant \frac{1}{\epsilon}$. Quindi prendendo $n \geqslant \max\left\{5, \frac{1}{\epsilon}\right\}$ abbiamo l'asserto.