

1. ESERCIZI SU ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE DI INSIEMI

Esercizio 1.

Determinare estremo superiore ed inferiore (eventualmente massimo e minimo) dei seguenti insiemi:

$$(A):= \{x = n - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{R}\}$$

$$(B):= \{x = (-1)^n n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{R}\}$$

$$(C):= \{x = \frac{n-3}{n^2}, n \in \mathbb{R}\} \cup (-1, 1)$$

$$(D):= \{x = n^2 + 3n - 1, n \in \mathbb{R}\}$$

$$(E):= \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 2\}$$

$$(F):= \{x \in \mathbb{Q}: x^2 \leq 2\}$$

$$(G):= \{x^3: x \in \mathbb{Z}\}$$

$$(H):= \{x = \sin \frac{n\pi}{8}, n \in \mathbb{R}\}$$

$$(I):= \{x = \frac{t+1}{t-2}, t \in \mathbb{R}, t > 2\}$$

$$(L):= \{|x| : x^2 + x < 2, x \in \mathbb{R}\}$$

Suggerimento

- Verificare se l'insieme in questione, detto Γ , è limitato.
- Detti x_1 ed x_2 rispettivamente gli eventuali minorante e maggiorante di Γ , verificare se appartengono ad Γ , in caso affermativo si è trovato il massimo e/o il minimo e l'esercizio è terminato.
- Verificare, ove necessario, che $x_1 = \inf \Gamma$ mostrando che è il più grande dei minoranti di Γ , ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \Gamma: x_1 + \varepsilon > x$$

e $x_2 = \sup \Gamma$ mostrando che é il piú piccolo dei maggioranti di Γ , ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \Gamma: x_2 - \varepsilon < x.$$

Esercizio 2.

Dato l'insieme:

$$B = \left\{ x = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in (1, +\infty) \quad n \in \mathbf{N} \right\}$$

determinarne estremo superiore ed inferiore.

Cosa cambia se $0 < \alpha < 1$?

Esercizio 3

Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$A = \left\{ \frac{|x-3|}{|x+2|} \leq 1, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x \neq -2 \right\}$$

Specificare se i valori trovati sono massimo e minimo.

Esercizio 4

Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$C = \left\{ x = \frac{n^2 - 1}{3n^2} + \frac{2}{3}, \quad n \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Esercizio 5

Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$D = \left\{ x = \frac{3n - |\sin n|}{n}, \quad n \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}$$