Esercitazioni di GE03
Foglio 2

March 6, 2010

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che $U \subseteq X$ è aperto se e solo per ogni $x \in U$ esiste un aperto V tale che $x \in V \subseteq U$.

Esercizio 2 (Esercizio 2.3 pg 20 Lee)**.** a) Mostrare che in uno spazio discreto X le successioni convergenti sono quelle eventualmente costanti, cioè quelle successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che esistono un $N \in \mathbb{N}$ ed un $a \in X$ tali che $a_n = a$ per ogni $n \geq N$.
b) Mostrare che in uno spazio con la topologia grossolana ogni successione è convergente.

Esercizio 3 (Esercizio 2.5 pg 22 Lee)**.** Dimostrare che l'omeomorfismo è una relazione id equivalenza.

Esercizio 4. Esercizio 2.8 del Lee, parti (b) (c) (d). Nota: in alcuni punti si deve usare la parte (a) che è stata svolta nelle esercitazioni.

Esercizio 5. Esercizio 2.10 del Lee, parti (c) (e) (f).

Esercizio 6 (Esercizio 2.14 Lee)**.** Si dimostri che una mappa continua biunivoca è un omeomorfismo se e solo se è aperta, se e solo se è chiusa.

Esercizio 7. a)Si consideri $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea. Mostrare che i dischi con centro in $\mathbb{Q}^n$ e raggio in $\mathbb{Q}^+$ sono una base per questo spazio topologico.
b *) Sia (X, d) uno spazio metrico che contiene un sottoinsieme $D \subseteq X$ denso e numerabile. Dimostrare che i dischi con centro in D e raggi razionali sono una base per la toplologia indotta dalla metrica.

Esercizio 8 (Problema 2-11 Lee)**.** Dimostrare che uno spazio topologico è una varietà topologica di dimensione 0 se e solo se è uno spazio discreto numerabile.

Esercizio 9. Sia X uno spazio soddisfacente al primo assioma di numerabilità e sia $A \subseteq X$.
a) Un punto $p \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di A tale che $a_n \longrightarrow p$
b) Sia denoti con $D(A)$ l'insieme dei punti limite di un sottoinsieme A. Si mostri che $A \cup D(A) = \overline{A}$.
c)Provare a risolvere b) nel caso in cui X non sia 1st countable.

Esercizio 10 (*)**.** Risolvere il problema 2-7 del Lee (i casi che non sono stati risolti ad esercitazione)