Esercitazioni di GE03
Foglio 3

March 30, 2010

Esercizio 1. Dimostrare che la topologia euclidea su $\mathbb{R}$ induce la topologia discreta su $\mathbb{Z}$. Descrivere la topologia di $\mathbb{Z}$ comee sottospazio di $(\mathbb{R}, \mathscr{S})$ e di $(\mathbb{R}, \mathscr{C})$, rispettivamente, dove $\mathscr{S}$ denota la topologia della semicontinuità inferiore e $\mathscr{C}$ la topologia cofinita.

Esercizio 2. Sia $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, |x_2 \geq x_1 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ dire quali dei seguenti insiemi sono aperti nella topologia di X come sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

$$A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x_1 \leq x_2 < 1\}, \quad B = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x_1 \leq x_2\},$$

$$C = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x_1 < x_2\}.$$

Esercizio 3. Dimostrare che se X e Y sono spazi topologici allora l'applicazione $\sigma : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ data da $(x, y) \mapsto (y, x)$ è un omeomorfismo.

Esercizio 4. Dimostrare che se X_i con $i = 1, .., n$ sono spazi discreti (rispettivamente grossolani), allora il prodotto $X_1 \times \ldots \times X_n$ è discreto (rispettivamente grossolano)

Esercizio 5. Sia X lo spazio topologico ottenuto da $(\mathbb{R}, \mathscr{E})$ collassando $\mathbb{Q}$, cioè quozientando $\mathbb{R}$ con la relazione ρ data da

$$x \rho y \Leftrightarrow \begin{cases} y = x & \text{o (non esclusivo)} \\ x, y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dimostrare che la topologia quoziente su X è la topologia grossolana.

Esercizio 6. Dimostrare che il quoziente di uno spazio separabile è separabile.

Esercizio 7. Si definisca la relazione di equivalenza sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ data da $x \rho y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Z}$. Si dimostri che $(\mathbb{R}, \mathscr{E})/\rho$ è omoeomorfo a $\mathbb{S}^1$

Esercizio 8. Si consideri $\mathbb{R}$ dotato della topologia cofinita $\mathscr{C}$ e sia X lo spazio ottenuto collassando (vedere esercizio 5) l'insieme $A\{1,\ 2,\ \ldots,\ 10\}$. Dimostrare che X ha ancora la topologia cofinita. Dimostrare altresì che lo spazio X' ottenuto da $(\mathbb{R}, \mathscr{C})$ collassando $\mathbb{Z}$ non ha la topologia cofinita (SUGGERIMENTO: trovare un insieme che è complementare di un insieme infinito ma è aperto)

Esercizio 9. Dimostrare che $[0,1] \cup (2,3) \subseteq (\mathbb{R}, \mathscr{E})$ non è connesso (SUGGERIMENTO: mostrare che $[0,1]$ e $(2,3)$ sono contemporaneamente aperti e chiusi).

Esercizio 10. Dimostrare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dotato della topologia cofinita è connesso se e solo se è finito e costituito da un unico elemento.

Esercizio 11. Dimostrare che $\mathbb{Q}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$ ha come unici sottoinsiemi connessi non vuoti i punti. Un sottoinsieme i cui unici sottoinsiemi non vuoti connessi siano costituiti dai punti si dice totalemente disconnesso.

Esercizio 12. Dimostrare che se uno spazio X è connesso per archi e $f : X \longrightarrow Y$ è un'applicazione coontinua e suriettiva allora anche Y è connesso per archi.

Esercizio 13. Dimostrare che un cilindro ed un cono, con la topologia di sottospazi di $(\mathbb{R}^3, \mathscr{E})$ non possono essere omeomorfi.

Esercizio 14. Dimostrare che uno spazio X è connesso se e solo se ogni applicazione continua da X in uno spazio discreto è costante.

Esercizio 15. Il *grafico* di una funzione $f : X \longrightarrow Y$ è definito come l'insieme dei punti di $X \times Y$ della forma $(x, f(x))$ con $x \in X$. Dimostrare che se f è una funzione continua fra spazi topologici, il grafico di f è omeomorfo a X.

Esercizio 16. Dimostrare che per ogni $y \in Y$ il sottospazio $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ è omeomorfo ad X.

Esercizio 17. Dimostrare che due spazi topologici X e Y sono connessi se e solo se $X \times Y$ è connesso.