Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
GE03-Topologia generale e topologia algebrica
Prof. M. Pontecorvo
Tutorato 4 - compattezza

Esercizio 1.
a) Dimostrare che uno spazio topologico compatto è discreto se e solo se è finito.
b) Dimostrare che un sottospazio chiuso e discreto di uno spazio topologico compatto è finito.

Esercizio 2.
Sia X uno spazio topologico, dimostrare che un unione finita di suoi sottospazi compatti è compatta.

Esercizio 3.
Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ non sono compatti:

$$D^n \backslash \{0\}, \quad \mathbb{S}^{n-1} \backslash \{(1, 0, \ldots, 0)\}, \quad , \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}, \quad \mathrm{Int}([0, 1]^n)$$

Eventualmente trovare un ricoprimento apeerto che non ammette sottoricoprimento finito.

Esercizio 4.
a) Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico X è detta soddifacente la proprietà dell'intersezione finita (pif) se ogni sua sottofamiglia finita $\mathcal{F}$ è tale che $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Per ogni spazio topologico (X, τ) sono equivalenti le seguenti

(i) X è compatto.

(ii) Per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di chiusi che soddisfa pif allora $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$

(iii) Per ogni famiglia di chiusi $\mathcal{A}$ tale che $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$ esiste una sottofamiglia finita $\mathcal{F}$ con $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

b) (Esercizio 4.4 pg 76 del Lee) Si dimostri che se $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di chiusi di uno spazio topologico compatto tale che $F_n \supseteq F_{n+1}$ allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
c) Dimostrare che Se X è uno spazio topologico a base numerabile allora X è compatto se e solo se ogni successione decrescente di chiusi non vuoti ha intersezione non vuota.

Esercizio 5.
Dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 6.
Si dimostri che se $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ è una funzione periodica di periodo T (i.e. $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$), allora $f(\mathbb{R})$ è compatto.

Esercizio 7.
Dimostrare che ognuno dei seguenti spazi topologici

$$[0,1]^n, \quad \mathbb{S}^{n-1}, \quad D^n$$

non è omeomorfo a nessuno dei seguenti

$$\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^n \backslash [0,1]^n, \quad \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{S}^{n-1}, \quad \mathbb{R}^n \backslash D^n$$

Esercizio 8. *
Si ricordi il teorema di Baire:

> L'intersezione di una famiglia numerabile di aperti densi in uno spazio metrico completo è densa

Usare il teorema di Baire per dimostrare che

1. $\mathbb{R}$ non è numerabile.
2. $\mathbb{Q}$ non è completo
3. Se uno spazio metrico numerabile è completo allora è discreto