Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
GE03-Topologia generale e topologia algebrica
Prof. M. Pontecorvo
Tutorato 6 - Omotopia

Esercizio 1.
Si dimostri che in $\mathbb{R}^n$ due cammini continui con gli stessi estremi sono omotopi. Più in generale, dato un qualsiasi sottoinsieme CONVESSO $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e x_0 un suo punto si dimostri che $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Esercizio 2.
Si dimostri che la composizione di cammini soddisfa la proprietà di cancellazione, i.e. se $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ e $g_0 \simeq g_1$ allora $f_0 \simeq f_1$

Esercizio 3.
Dimostrare che la mappa $f : \mathbb{S}^1 \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times I$ definita da $f(\theta, s) = (\theta + 2\pi\theta s, s)$ è omotopa all'identità .

Esercizio 4. **
a) Sia X uno spazio topologico connesso per archi con un punto base e. Dimostrare che se esiste una mappa continua $F : X \times X \longrightarrow X$ tale che, per ogni $x \in X$, $F(e, x) = F(x, e) = x$ allora il gruppo fondamentale $\pi_0(X, e)$ è commutativo nei seguenti passi.

1. (*) Siano α e β due cammini con estremi in e si osservi che $t \mapsto F(\alpha(t), \beta(t))$ è un cammino con estremi in e. Se α' e β' sono due cammini omotopi ad α e β rispettivamente, allora $t \mapsto F(\alpha'(t), \beta'(t))$ è omotopo a $F(\alpha(t), \beta(t))$.

2. Si denoti con $\mathbf{e}$ il cammino costante $t \mapsto e$, si dimostri che $F(\alpha * \mathbf{e}(t), \mathbf{e} * \beta(t)) = \alpha * \beta(t)$ e se ne deduca che $F(\alpha(t), \beta(t))$ è omotopo a $\alpha * \beta(t)$.

3. Si provi che $F(\mathbf{e} * \alpha(t), \beta * \mathbf{e}(t)) = \beta(t) * \alpha(t)$ e se ne deduca, mettendo insieme tutti i risultati intermedi, l'enunciato.

b)Dimostrare che il gruppo fondamentale di un gruppo topologico connesso per archi è commutativo.

Esercizio 5.
Sia X uno spazio topologico, si denoti cone $e_x : I \longrightarrow X$ la mappa costante data data $t \mapsto x$. Dimostrare che e_x è omotopa a e_y se e solo se x e y appartengono alla stessa componente connessa per archi.