GE3 - Topologia Generale, Elementi di Topologia Algebrica
Dip. Matematica - Università Roma Tre

Prof. M. Pontecorvo

Compito - 15 Aprile 2010

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici. **NON PARLARE** e metter via i cellulari pena il ritiro del compito.
Rispondere alle domande giustificando attentamente le risposte.

Punteggio totale 100 punti.

Esercizio 1. Siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni continue tra spazi topologici con Y di Hausdorff.

1. **(15 punti).** Dimostrare che il seguente sottoinsieme è un chiuso

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

2. **(10 punti).** Sia ora $D \subseteq X$un sottoinsime denso di X.
   Dimostrare che $f = g$ se $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in D$.

Girare, prego →

Esercizio 2.

1. **(10 punti).** Definire la topologia di Zariski in $\mathbb{R}^n$.
2. **(15 punti).** Si dimostri che la topologia di Zariski su $\mathbb{R}$ coincide con la topologia cofinita.

Esercizio 3.
Il Pettine del Topologo è il seguente sottospazio $\mathcal{P}$ del piano $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \qquad \text{con}$$

$$\mathcal{A} = \{y = 1\,,\ 0 \leq x \leq 1\}, \qquad \mathcal{B} = \{x = \tfrac{1}{n}\,,\ 0 \leq y \leq 1\}_{n \in \mathbb{N}}$$

e $\mathcal{C} = \{x = 0\,,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

1. **(10 punti).** Fare un disegno di $\mathcal{P}$ e definire la topologia di sottospazio.
2. **(10 punti).** $\mathcal{P}$ è uno spazio topologico connesso per archi?
3. **(10 punti).** $\mathcal{P}$ è localmente connesso per archi?
4. **(10 punti).** Denotiamo poi con q il punto di coordinate $(0, 1)$ e consideriamo il sottospazio $\mathcal{P} \setminus \{q\}$.

   Dimostrare che $\mathcal{P} \setminus \{q\}$ ha due componenti connesse per archi e individuarle.
5. **(10 punti).** $\mathcal{P} \setminus \{q\}$ è uno spazio topologico connesso?