GE3 - Topologia Generale, Elementi di Topologia Algebrica.
Dip. Matematica - Università Roma Tre.

Prof. M. Pontecorvo

11 Gennaio 2011

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intenda consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici. **NON PARLARE** e metter via i cellulari pena il ritiro del compito.
Rispondere alle domande giustificando attentamente le risposte.

Punteggio totale 120 punti.

1. La topologia di Zariski $\mathcal{Z}$ su $\mathbb{R}$ è cosí definita: un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}$ è *chiuso* se e solo se $S = \mathbb{R}$ oppure S è il luogo degli zeri di un qualche polinomio $P(X)$ di una variabile: esiste cioè $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tale che $S = \{x_0 \in \mathbb{R} \mid P(x_0) = 0\}$. Per esempio $\emptyset$ è chiuso perchè è il luogo degli zeri del polinomio $x^2 + 1 = 0$. Abbiamo visto durante il corso che $\mathcal{Z}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.

   (a) **(15 punti).** Dire se $\mathcal{Z}$ è più fine, meno fine o non-comparabile con la topologia naturale di $\mathbb{R}$.

   (b) **(15 punti).** Dire se $\mathcal{Z}$ è più fine, meno fine o non-comparabile con la topologia cofinita di $\mathbb{R}$.

Girare, prego →

2. (a) **(15 punti).** Fornire un esempio di uno spazio topologico X che sia connesso ma non connesso-per-archi.
   (b) **(15 punti).** Un tale spazio X può essere una varietà topologica?

3. **(15 punti).** Dare la definizione di spazio topologico compatto e usando solo la definizione dimostrare che $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ e \ 0 \leq y < 1\}$ è non-compatto nella topologia naturale del piano $\mathbb{R}^2$.

4. Sia Σ la somma connessa di due tori e un piano proiettivo.
   (a) **(15 punti).** Disegnare un poligono convesso etichettato il cui spazio quoziente sia omeomorfo a Σ.
   (b) **(15 punti).** Calcolare la caratteristica di Eulero $\chi(\Sigma)$.
   (c) **(15 punti).** Enunciare il teorema di classificazione delle superfici compatte e determinare la classificazione topologica della superficie Σ.