Esercizi sull'uso delle derivate

Esercizio 1

Calcolare
$$lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{\sin x}{x} \qquad x>0$$

Esercizio 2

Dimostrare che per ogni $x\in[0,1]$ si ha
$$\text{arccosx} = 2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

Esercizio 3

Sia f continua e derivabile due volte in (a,b), con derivata prima continua. Supponiamo che esista un punto $c\in(a,b)$ tale che $f(a)=f(b)=f(c)$. Dimostrare che esiste $y\in(a,b)$ tale che $f''(y)=0$.

Esercizio 4

Si dimostri la seguente generalizzazione del Teorema di Rolle:
sia $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che
$$lim_{x\to+\infty}f(x)=f(a).$$
Allora esiste un punto $\xi\in(a,+\infty)$ tale che $f'(\xi)=0$.

Esercizio 5 (Teorema della media integrale pesata)

Siano $g(x)$, $p(x)$ die funzioni integrabili in $[a,b)$ e sia $p(x)\geq 0$ in $[a,b]$. Dimostrare che $\forall x,x_0\in[a,b]$, $(x>x_0)$ si ha
$$l(x,x_0)\int_{x_0}^x p(t)dt\leq\int_{x_0}^x g(t)p(t)dt\leq L(x,x_0)\int_{x_0}^x p(t)dt,$$
e che se $g(x)$ é anche continua esiste un punto $\xi\in(x,x_0)$ tale che
$$\int_{x_0}^x g(t)p(t)dt=g(\xi)\int_{x_0}^x p(t)dt$$