ESERCIZI SUGLI INTEGRALI

ESERCIZIO I : integrali di funzioni razionali

$$1) \qquad \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$$

Svolgimento:
Il discriminante del denominatore é negativo. Mi riconduco ad un integrale del tipo $\int \frac{f'}{f}$ e poi integro la parte restante.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2},$$

sostituendo nell'ultimo integrale $t = x+1$, quindi $dt = dx$, si ha

$$-2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = -2 \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = -\int \frac{1}{t^2+2} + \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}$$

L'ultimo integrale é uguale a

$$\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int t \left(\frac{2t}{(t^2+2)^2} \right) dt =$$

per parti

$$= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}}$$

Ricapitolando e sostituendo $t = x+1$ si ha:

$$-\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{x+1}{2(x+1)^2+4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} + C$$

In modo analogo risolvere:

2) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$ $\left[\mathbf{R}.\log\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + C\right]$

3) $\int \frac{x\ dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ $\left[\mathbf{R}.\frac{1}{8}\log\frac{(x+3)^6}{|x+5|^5|x+1|} + C\right]$

4) $\int \frac{x^3-6\ dx}{x^4+6x^2+8}$ $\left[\mathbf{R}.\log\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C\right]$

5) $\int \frac{x^5\ dx}{x^3-1}$ $\left[\mathbf{R}.\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\log(x^3-1) + C\right]$

6) $\int \frac{4\ dx}{x^4+1}$ $\left[\mathbf{R}.\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \sqrt{2}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C\right]$

ESERCIZIO II : integrali di funzioni irrazionali

Sostituzioni utili:

Se k é un denominatore comune delle frazioni $\frac{m}{n}, .., \frac{r}{s}$, esponenti della x nella funzione integranda, si puó sostituire $x = t^k$, $dx = kt^{k-1}dt$. Si ottiene una funzione razionale in t.

Se nell'integranda appaiono termini del tipo $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}$, estendendo quanto detto prima si puó sostituire
$$t^k = \frac{ax+b}{cx+d}.$$
Si ottiene una funzione razionale in t.

Per integrali del tipo
$$\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$
prima sostituzione di Eulero: $a > 0$
si ponga $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$.
seconda sostituzione di Eulero: $c > 0$
si ponga $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.
terza sostituzione di Eulero: $ax^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$
si ponga $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$.

Svolgere i seguenti esercizi:

$$7)\quad \int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$$

Svolgimento:
usiamo la seconda sostituzione: $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$, quindi $x = \frac{2t-1}{1-t^2}$, $dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}$. Sostituendo nell'integrale si ha:

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx = 2\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = \int -2 + \int \frac{1}{1-t^2}dt =$$

$$= -2t - \int \frac{1}{1-t}dt + \int \frac{1}{1+t}dt = -2t - \log|1-t| + \log|1+t| + C.$$

Infine sostituendo $t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ otteniamo

$$-2\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} + \log|2x + 2\sqrt{1+x+x^2}+1| + C.$$

8) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$ $\left[\mathbf{R}. \frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3} - \log(\sqrt[4]{x^3}+1)] + C\right]$

9) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$ $\left[\mathbf{R}. \log\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C\right]$

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$ $\left[\mathbf{R}. \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right| + C\right]$

11) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}dx}{x}$ $\left[\mathbf{R}. \sqrt{x^2+2x} + \log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right| + C\right]$

12) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$ $\left[\mathbf{R}. \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C\right]$

13) $\int \frac{(x+1)dx}{2x+x^2\sqrt{2x+x^2}}$ $\left[\mathbf{R}. -\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C\right]$

14) $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}dx}{x^2}$ $\left[\mathbf{R}. -\frac{8}{x^2+\sqrt{4x+x^2}} + \log\left|x+2+\sqrt{4x+x^2}\right| + C\right]$

ESERCIZIO III : integrali di alcune classi di funzioni trigonometriche

Puó essere utile la sostituzione:
$\tan\frac{x}{2} = t$, quindi $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Calcolare l'integrale

$$15) \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

Svolgimento: sostituiamo $\tan\frac{x}{2} = t$ quindi

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = 2\int \frac{tdt}{t^4+1}$$

Procedendo analogamente all'esercizio 6 si ottiene $\frac{2t}{t^4+1} = \frac{2t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}$....

Svolgere i seguenti esercizi:

16) $\int \sin^5 x dx$ $\left[\mathbf{R}. -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C\right]$

17) $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$ $\left[\mathbf{R}. -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C\right]$

18) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$ $\left[\mathbf{R}.\frac{1}{3}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-2}{2\tan\frac{x}{2}-1}\right| + C\right]$

19) $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$ $\left[\mathbf{R}.\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{x}{2} + C\right]$

20) $\int \frac{\sin^2 x\ dx}{1+\cos^2 x}$ $\left[\mathbf{R}.\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) - x + C\right]$