CAM, a.a. 2003-2004 - Esercizi 8 [Soluzioni]

Giampiero Palatucci

17 maggio 2004

1. Scrivere il polinomio di Taylor in $x_0 = 0$ sino all'ordine 5 per le seguenti funzioni.

a. $\sin^3 x$;

Si ha $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, allora

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Da cui

$$\sin^3 x = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + \text{ termini di ordine superiore... } = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5).$$

b. $(e^x - 1)^2$.

Analogamente, poiché $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, segue

$$(e^x - 1)^2 = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \frac{x^5}{4} + o(x^5).$$

2. Sfruttare lo sviluppo di Taylor per calcolare i seguenti limiti.

a. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right)$;

Subito, da $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}$$

Sfruttiamo gli sviluppi in polinomi di Taylor per le funzioni trigonometriche; si ha:

$$\begin{aligned} x\cos x = x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) &= x-\frac{x^3}{2}+o(x^4);\\ \sin x &= x-\frac{x^3}{6}+o(x^4);\\ x^2\sin x &= x^2(x+o(x)). \end{aligned}$$

Da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^4)}{x^3+o(x^3)}=-\frac{1}{3}.$$

b. Analogamente, si trova $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^5}{\left(\sin x - x\cos\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{270^2}{2}$.

3. Calcolare:

a. $\sin(0,6)$ con un errore assoluto $E \le 10^{-3}$.

Conviene utilizzare la formula del resto di Lagrange, che per la funzione $\sin x$, fornisce:

$$R^n(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+3)!}x^{2n+3},\ \text{per } 0<\xi<x \text{ opportuno.}$$

Indichiamo con $T^n(x)$ il polinomio di Taylor all'ordine n per la funzione $\sin x$.

Dunque

$$E=|\sin x - T^n(x)|=\left|\frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+3)!}x^{2n+3}\right|\le\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

In particolare, per $x=(0,6)$, si ha

$$E=|\sin(0,6)-T^n(0,6)|\le\frac{(0,6)^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Allora, è sufficiente trovare il più piccolo n per cui si abbia

$$\frac{(0,6)^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq 10^{-3}.$$

Si vede facilmente che si tratta di $n = 1$.

Quindi

$$\sin(0,6) = T^1(0,6) \pm E,$$

dove $T^1(0,6) = 0,6 - \dfrac{(0,6)^3}{3!}$.

b. $\sqrt{e}$ con un errore assoluto $E \leq 10^{-2}$.

Analogamente al caso **(a)**, si trova

$$\sqrt{e} \equiv e^{0,5} = T^8(0,5) \pm E.$$