COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT.
....										

1. Dopo aver definito con precisione la nozione di iniettività e suriettività, si forniscano due esempi espliciti di:
   i. un'applicazione iniettiva e non suriettiva dall'insieme dei numeri interi $\mathbf{Z}$ in se;
   ii. un'applicazione suriettiva ma non iniettiva dall'insieme dei numeri interi $\mathbf{Z}$ in se. .

2. Si consideri la relazione $\sim$ su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definita da

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e se ne determinino le classi di equivalenza. .

3. Sia $\mathcal{P}$ linsieme costituito da tutti i sottoinsiemi non vuoti di $\mathbf{N}$ (cioè $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{N}) \setminus \emptyset$). Si consideri la seguente relazione definita su $\mathcal{P}$:

$$A \leq B \quad \Longleftrightarrow \quad A = B \text{ oppure } a \leq b \ \forall a \in A, b \in B.$$

(a) Provare che si tratta di una relazione d'ordine;
(b) decidere se si tratta di una relazione d'ordine totale.

4. Dimostrare, usando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$$

.

5. Trovare (se esistono) tutti gli interi compresi tra -100 e 100 che divisi per 3 danno come resto 2, divisi per 5 danno come resto 3 e che moltiplicati per 5 sono congrui a 2 modulo 8.

6. Dopo aver definito la nozione di anello e campo, si dia un esempio di un anello che non è un campo.

7. Calcolare la parte reale e quella immaginaria del numero complesso: $\frac{2+3i}{5+4i} + (1+i)^{30}$.

8. Dopo aver enunciato e dimostrato il Teorema di Eulero, lo si utilizzi per calcolare le ultime due cifre decimali di 1999^{1999}.

9. Consideriamo le seguenti permutazioni in S_7:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

a. Esprimere σ e τ come il prodotto di cicli disgiunti.

b. Calcolare la parità di σ e di τ.

c. Calcolare $\sigma^2 \cdot \tau$, τ^5, σ^{-1}. .