Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Esercitazione 2
Giovedì 9 Ottobre 2008
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Dare un esempio di applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con f:

   (a) iniettiva, ma non suriettiva;

   (b) suriettiva, ma non iniettiva.

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ sia $f(n) := 2n$. Chiaramente $2m = 2n \Rightarrow m = n$, quindi f è iniettiva; inoltre i numeri dispari non appartengono all'immagine di $\mathbb{N}$, quindi f non è suriettiva.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$ sia $f(n) := \left[\frac{n}{2}\right]$, dove $[\cdot]$ indica la parte intera (inferiore). f è suriettiva: infatti $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(2n) = n$; inoltre f non è iniettiva: ad esempio $f(0) = f(1)$.

2. Si considerino le seguenti funzioni. Per ognuna si determini l'immagine del dominio e la preimmagine di 0 e infine si dica quale di queste funzioni è iniettiva, suriettiva o biiettiva:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$;

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 10$;

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$;

   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{1}{x} & \text{altrimenti.} \end{cases}$

   (e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) =$ somma delle cifre di n (in base 10);

   (f) $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, $f(n, m) = \frac{n}{m}$.

   (a) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, f è iniettiva ma non suriettiva;

   (b) $f(\mathbb{R}) = [10; +\infty)$, $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, f non è né iniettiva né suriettiva;

   (c) $f(\mathbb{R}) = [-1; +1]$, $f^{-1}(\{0\}) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, f non è né iniettiva né suriettiva;

   (d) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, f è biiettiva;

   (e) $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, f è suriettiva ma non iniettiva;

   (f) $f(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) = \mathbb{Q}$, $f^{-1}(\{0\}) = \{(0, m) : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, fè suriettiva ma non iniettiva.

3. Sia $f : X \to Y$ una funzione. Siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Dimostrare che:

   (a) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

   (b) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

   Sapreste dare condizioni sufficienti sulla funzione f affinché valgano gli uguali, invece delle inclusioni?

(a) Se $y \in f(f^{-1}(B))$ allora per definizione $\exists x \in f^{-1}(B)$ t.c. $y = f(x)$. $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) = B$, perciò $y \in B$. Notiamo inoltre che se f è suriettiva allora dato $y \in B$ esiste $x \in X$ t.c. $f(x) = y$, da cui $x \in f^{-1}(B)$ e perciò $y \in B$, quindi vale $=$.

(b) Se $x \in A$ allora $f(x) \in f(A)$ e quindi $x \in f^{-1}(f(A))$. Se $x \in f^{-1}(f(A))$ allora $f(x) \in f(A)$ da cui $\exists a \in A$ t.c. $f(x) = f(a)$. Se f è iniettiva notiamo allora che $x = a$, quindi $x \in A$ e perciò vale $=$.

4. Avendo definito il prodotto tra due numeri naturali n, m, come visto durante l'esercitazione, dimostrare che per ogni $n, m, k \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti proprietà:

(a) i. $(m + k)n = mn + kn$ (proprietà distributiva sinistra);
 ii. $m(n + k) = mn + mk$ (proprietà distributiva destra);

(b) $mn = nm$ (proprietà commutativa);

(c) $(mn)k = m(nk)$ (proprietà associativa);

(d) $mn = 0$ se, e solo se, $m = 0$ o $n = 0$.

(a) i. Fissiamo m, n e dimostriamolo per induzione su k. Per $k = 0$ l'asserto è vero (base dell'induzione). Supponiamolo vero per k (ipotesi induttiva) e dimostriamolo per $k + 1$: $(m + (k + 1))n = ((m+k)+1)n$ (per associatività della somma) $= (m+k)n+n$ (per definizione di prodotto)$= (mn + kn) + n$ (per ipotesi induttiva) $= mn + (k + 1)n$ (per associatività della somma e definizione di prodotto).

 ii. Fissiamo n, k e dimostriamolo per induzione su m. Per $m = 0$ l'asserto è vero. Supponiamolo vero per k e dimostriamolo per $m + 1$: $(m + 1)(n + k) = m(n + k) + (n + k)$ (per definizione di prodotto) $= (mn + mk) + (n + k)$ (per ipotesi induttiva) $= (m + 1)n + (m + 1)k$ (per associatività e commutatività della somma e definizione di prodotto).

(b) Fissiamo m e dimostriamolo per induzione su n. Per $n = 0$ è vero: $0 \cdot m = 0 = m \cdot 0$ (eventualmente la seconda uguaglianza si dimostra anch'essa per induzione). Supponiamolo vero per n e dimostriamolo per $n + 1$: $m(n + 1) = mn + m$ (proprietà distributiva destra del prodotto) $= m + nm$ (proprietà commutativa della somma e ipotesi induttiva) $= (1 + n)m$ (proprietà distributiva sinistra del prodotto) $= (n + 1)m$ (proprietà commutativa della somma).

(c) Fissiamo n, k e dimostriamolo per induzione su m. La base dell'induzione è facilmente verificata. Supponiamo quindi l'asserto vero per m e dimostriamolo per $m + 1$: $((m + 1)n)k = (mn + n)k$ (def. di prodotto)$= (mn)k + nk$ (proprietà distributiva sinistra del prodotto) $= m(nk) + nk$ (ipotesi induttiva) $= (m + 1)(nk)$ (def. di prodotto).

(d) Se $m = 0$ allora $mn = 0$ per definizione. Se $n = 0$ allora si può procedere per induzione oppure notare che $m \cdot 0 + 0 = m \cdot (0 + 0) + 0 = m \cdot 0 + m \cdot 0 + 0 = m \cdot 0 + m \cdot 0 \Rightarrow m \cdot 0 = 0$ (per la proprietà (c) del lemma 1.34). Se invece sia n che m sono diversi da 0, allora, per definizione, $nm = (n - 1)m + m$ (perché $n \neq 0$)$= s^m((n - 1)m) \neq 0$ (per il fatto che $m \neq 0$ e che vale l'assioma (P3)).