Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Esempio di esonero
Giovedì 6 Novembre 2008
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Siano A, B, C tre insiemi. Dimostrare che:

   (a) $A \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C)) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

   (b) $A \setminus (A \setminus (A \setminus (A \setminus B))) = A \cap B$.

   (a) Per una legge di De Morgan $A \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C)) = (A \setminus (A \cap B)) \cap (A \setminus (A \cap C))$. Dalla definizione di differenza insiemistica segue poi che $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$ e $A \setminus (A \cap C) = A \setminus C$, da cui la tesi.

   (b) È facile dimostrare che, dati due insiemi X, Y, $X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$. Perciò $A \setminus (A \setminus (A \setminus (A \setminus B))) = A \setminus (A \setminus (A \cap B)) = A \cap (A \cap B) = A \cap B$.

2. Siano X, Y insiemi e $f : X \to Y$ una funzione. Si definisca $f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ così: per ogni $B \subseteq Y$, $f^*(B) := f^{-1}(B) \subseteq X$. Si dimostri che f è biiettiva se e solo se f^* è biiettiva.

   Premettiamo una semplice osservazione: in generale, se $g : W \to Z$ è una funzione biiettiva tra due insiemi, allora l'immagine inversa tramite g di un insieme $J \subseteq Z$ è uguale all'immagine di J tramite g^{-1}.

   Iniziamo col supporre f biiettiva. Per il teorema 1.30 del libro questo implica che esiste ed è unica l'inversa di f, f^{-1}. Si consideri $(f^{-1})^* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$. In virtù dell'osservazione e per il fatto che $(f^{-1})^{-1} = f$ si ha che $\forall B \in \mathcal{P}(Y)$, $(f^{-1})^*(f^*(B)) = f(f^{-1}(B)) = (f \circ f^{-1})(B) = id_Y(B) = B$. Analogamente $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, $f^*((f^{-1})^*(A)) = id_X(A) = A$. Quindi $(f^{-1})^* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(Y)}$ e $f^* \circ (f^{-1})^* = id_{\mathcal{P}(X)}$. Quindi f^* è invertibile e perciò biiettiva.

   Sia ora f^* biiettiva. Dimostriamo che in questo caso f è iniettiva: siano $a, b \in X$ tali che $f(a) = f(b)$. Essendo f^* suriettiva, allora $\exists B \subseteq Y$ t.c. $\{a\} = f^*(B)$. Però, siccome $f(a) = f(b)$, allora $b \in f^*(B)$, quindi $b \in \{a\}$ da cui $b = a$. Dimostriamo ora che f è suriettiva: se per assurdo non lo fosse, allora esisterebbe $y \in Y$ t.c. $y \notin f(X)$. Ma allora $X = f^*(Y) = f^*(Y \setminus \{y\})$, il che contraddice l'iniettività di f^*.

3. I numeri di Fibonacci sono definiti induttivamente come: $f_1 := 1$, $f_2 := 1$, $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$. Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$, f_{4n} è divisibile per 3.

   Per $n = 1$ (base dell'induzione) l'asserto è verificato: $f_4 = f_3 + f_2 = f_2 + f_1 + f_2 = 3$. Supponiamo quindi l'asserto vero per n e dimostriamolo per $n + 1$: $f_{4(n+1)} = f_{4n+4} = f_{4n+3} + f_{4n+2} = f_{4n+2} + f_{4n+1} + f_{4n+2} = 2f_{4n+1} + 2f_{4n} + f_{4n+1} = 3f_{4n+1} + 2f_{4n}$ che è divisibile per 3 per l'ipotesi induttiva.

4. Si consideri

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto ax + b,$$

dove a, b sono numeri fissati in $\mathbb{Q}$. Si dimostri per induzione che vale una delle seguenti formule:

(a) $f^n(x) = b(a^n + 1) - ab + a^n x$;

(b) $f^n(x) = b(a^n - 1) + a^n x$;

(c) $f^n(x) = b + ab + a^2 b + a^n x$;

(d) $f^n(x) = a^n x + b\frac{a^n - 1}{a-1}$

Si stabiliscano poi eventuali condizioni su a, b in modo che f^n sia biiettiva per ogni $n \geq 1$.

La formula giusta è la (d), come si può verificare facendo qualche esempio. Dimostriamola per induzione. Per $n = 1$ si ha $f(x) = ax + b$, e quindi la formula è verificata. Supponiamola allora vera per n e dimostriamola per $n+1$: $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(a^n x + b\frac{a^n-1}{a-1}) = a(a^n x + b\frac{a^n-1}{a-1}) + b = a^{n+1}x + b(a\frac{a^n-1}{a-1} + 1) = a^{n+1}x + b\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Dato che la composizione di applicazioni iniettive (suriettive) è iniettiva (suriettiva) e che, viceversa, in generale date $h : X \to Y$ e $k : Y \to Z$ si ha $k \circ h$ iniettiva $\Rightarrow h$ iniettiva e $k \circ h$ suriettiva $\Rightarrow k$ suriettiva allora f^n è biiettiva $\Leftrightarrow f$ è biiettiva. Se $a = 0$ f non è biiettiva. Se $a \neq 0$ allora f ammette $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $y \mapsto \frac{y-b}{a}$ come inversa, e quindi f è biiettiva.

5. Trovare esplicitamente una biiezione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Se A è un insieme finito non vuoto si dica, giustificando la risposta, se è possibile trovare una biiezione tra A e $A \times \{0, 1\}$.

Un esempio di biiezione è il seguente: $f : \mathbb{N} \times \{0, 1\} \to \mathbb{N}$, $(n, i) \mapsto 2n + i$. f è biiettiva, dato che $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, $n \mapsto \left(\left[\frac{n}{2}\right], \frac{-(-1)^n+1}{2}\right)$ (dove $[\cdot]$ è la parte intera inferiore) ne è l'inversa.

Nel caso di A insieme finito non vuoto si ha $|A \times \{0, 1\}| = 2|A| > |A|$. Perciò, per il principio di Dirichlet, non è possibile trovare una biiezione tra A e $A \times \{0, 1\}$.

6. Su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si definisca una relazione R in questo modo: $aRb :\Leftrightarrow ab$ è un quadrato in $\mathbb{R}$ (cioè $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $ab = c^2$). Si dimostri che R è una relazione d'equivalenza e si descriva esplicitamente $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/R$.

$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, essendo r^2 un quadrato in $\mathbb{R}$, rRr. Inoltre, siccome vale la proprietà commutativa per il prodotto, allora $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se aRb allora bRa. Infine $\forall a, b, h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che $ab = c^2, \exists c \in \mathbb{R}$, $bh = d^2, \exists d \in \mathbb{R}$ si ha $ab^2h = (cd)^2$ che implica $ah = (\frac{cd}{b})^2$ con $\frac{cd}{b} \in \mathbb{R}$. Perciò $aRb, bRh \Rightarrow aRh$. Siccome abbiamo visto che R verifica le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva allora R è una relazione d'equivalenza.

Siccome $r \in \mathbb{R}$ è un quadrato in $\mathbb{R}$ se, e solo se, $r \geq 0$, allora, dati $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $aRb \Leftrightarrow a, b$ hanno lo stesso segno. Quindi $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/R = \{[1]_R, [-1]_R\}$, dove $[1]_R = \mathbb{R}_{>0}$ e $[-1]_R = \mathbb{R}_{<0}$.

7. Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}_+$,
$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{k}$$
.

   Lo dimostreremo in due modi.

   Primo modo: $0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$, perciò $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{k}$.

   Secondo modo: procederemo brutalmente per induzione. Per $n = 1$ si ha $1 = \binom{1}{1} = \binom{1}{0} = 1$, quindi la formula è verificata. Prima di procedere col passo induttivo, introduciamo delle notazioni: $\delta_n := \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$ e $\epsilon_n := \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$. Supponiamo ora la formula vera per $n \geq 1$ e dimostriamola per $n+1$: $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \epsilon_n + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \binom{n+1}{k} = \epsilon_n + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \binom{n}{k-1} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{n+1} \binom{n}{k-1} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pari}}}^{n+1} \binom{n}{k-1} = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{k} + \delta_n + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{k-1} = \delta_n + 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n+1}{k} = \delta_n + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n+1}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n+1} \binom{n+1}{k}$.

8. Sull'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri la relazione R così definita: $(a,b)R(c,d) :\Leftrightarrow a|c, d|b$ (si ricordi che $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x|y$ vuol dire che $\exists z \in \mathbb{Z}$ t.c. $xz = y$). Si dica, giustificando le risposte, se R gode delle proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale e se R è una relazione d'equivalenza o di ordine. Infine si descriva esplicitamente l'insieme $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ t.c. $(a,b)R(2,7)\}$.

   R verifica la proprietà riflessiva: $a|a, b|b \Rightarrow (a,b)R(a,b)$. R non verifica la proprietà simmetrica: ad esempio $(1,5)R(5,1)$ ma $(5,1)\not R(1,5)$. R non verifica la proprietà antisimmetrica: ad esempio $(1,1)R(-1,-1)$ e $(-1,-1)R(1,1)$ ma $(-1,-1) \neq (1,1)$. R verifica la proprietà transitiva: se $(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,f)$ allora $a|c, c|e \Rightarrow a|e$, e $d|b, f|d \Rightarrow f|b$ perciò $(a,b)R(e,f)$. Siccome R non gode né della proprietà simmetrica né della proprietà antisimmetrica allora R non è né una relazione d'equivalenza né una relazione d'ordine.

   $(a,b)R(2,7) \Leftrightarrow a|2$ e $7|b$, perciò $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ t.c. $(a,b)R(2,7)\} = \{(1,7h)$ t.c. $h \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1,7h)$ t.c. $h \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2,7h)$ t.c. $h \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-2,7h)$ t.c. $h \in \mathbb{Z}\}$.

9. Su $A = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$ si consideri la relazione d'ordine data dall'inclusione $\subseteq$. Sia $B = \{\{1\},\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\},\{1,3,5\},\{1,2,3,4\}\} \subseteq A$.

   (a) Calcolare $|A|$ e $|B|$.

(b) B ha massimo? B ha minimo?

(c) Elencare, se vi sono, tutti gli elementi massimali e tutti gli elementi minimali di B.

(d) Fare un esempio di un maggiorante $x \in A$ di B tale che $x \notin B$ e un esempio di un minorante $x \in A$ di B tale che $x \notin B$.

(e) Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di B in A.

(f) $(B, \subseteq)$ è totalmente ordinato?

(a) $|A| = 2^5 = 32, |B| = 6$.

(b) B non ha massimo: per motivi di cardinalità potrebbe esserlo solo $\{1,2,3,4\}$, ma $\{1,3,5\} \not\subseteq \{1,2,3,4\}$. B ha minimo: $\{1\}$ è contenuto in tutti gli elementi di B.

(c) Essendo $\{1\}$ il minimo esso è anche l'unico elemento minimale di B. Gli elementi massimali sono $\{1,2,3,4\}$ e $\{1,3,5\}$.

(d) Maggiorante: $x = \{1,2,3,4,5\}$. Minorante: $x = \emptyset$.

(e) Essendo $\{1\}$ il minimo esso è anche l'estremo inferiore. L'unico elemento x di A che contiene sia $\{1,3,5\}$ che $\{1,2,3,4\}$ è $x = \{1,2,3,4,5\}$. Inoltre $x = \{1,2,3,4,5\}$ contiente tutti gli altri elementi di A, perciò $x = \{1,2,3,4,5\}$ è l'estremo superiore di B in A.

(f) No, dato che, ad esempio, $\{1,3,5\}$ e $\{1,2,3,4\}$ non sono confrontabili.