Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Esercitazione 8
Giovedì 27 Novembre 2008
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Dimostrare che se $n, m \in \mathbb{N}$ si scrivono come somma di due quadrati, allora nm si scrive come somma di due quadrati.

   Per ipotesi $\exists a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tali che $n = a^2 + b^2$ e $m = c^2 + d^2$. Allora $nm = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Si noti come tale uguaglianza risulti naturale usando i numeri complessi: $n = a^2 + b^2 = |a + ib|^2, m = c^2 + d^2 = |c + id|^2$; ma allora $nm = |a + ib|^2|c + id|^2 = |(a + ib)(c + id)|^2 = |(ac - bd) + i(ad + bc)|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

2. Dimostrare che se $z \in \mathbb{C}$ è radice di un polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$ allora anche $\overline{z}$ ne è radice.

   Per ipotesi $\exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n = 0$. Ma allora $\overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n} = \overline{0} = 0$, dove $\overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1}\overline{z} + \ldots + \overline{a_n}\overline{z^n} = a_0 + a_1\overline{z} + \ldots a_n\overline{z}^n$ dato che gli a_i sono reali; segue la tesi.

3. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $(z - 1)^4 = z^4$.

4. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $\mathrm{Im}\left(z\overline{z} + \frac{1}{z} + z + \overline{z}\right) = 0$.

   $\mathrm{Im}\left(z\overline{z} + \frac{1}{z} + z + \overline{z}\right) = \mathrm{Im}\,(z\overline{z}) + \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) + \mathrm{Im}\,(z + \overline{z}) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \frac{1}{|z|^2}\mathrm{Im}(\overline{z})$. Scrivendo $z = x + iy, z \neq 0$ l'equazione è ridotta a: $y = 0$. Perciò l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. Siano $a, b, h \in \mathbb{Z}$, con $(a, b) \neq (0, 0)$ e $h \neq 0$. Usando la definizione di massimo comun divisore, dimostrare che $MCD(ah, bh) = |h|MCD(a, b)$.

   $|h|MCD(a, b) \mid ah$ e $|h|MCD(a, b) \mid bh$ perciò $|h|MCD(a, b) \mid MCD(ah, bh)$, da cui $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $|h|kMCD(a, b) = MCD(ah, bh)$. Quindi $|h|kMCD(a, b) \mid ah \Rightarrow kMCD(a, b) \mid a$ e $|h|kMCD(a, b) \mid bh \Rightarrow kMCD(a, b) \mid b$, Perciò $kMCD(a, b) \mid MCD(a, b)$ da cui $k = 1$ e la dimostrazione è conclusa.

6. Utilizzare l'esercizio precedente per dimostrare il lemma di Euclide: "Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tali che $c|ab$ e tali che a e c siano coprimi; allora $c|b$".

   Dato che $c|ab$ allora $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $ck = ab$. $MCD(a, c) = 1 \Rightarrow |b| = MCD(ab, cb)$ per l'esercizio precedente. Quindi $|b| = MCD(ck, cb) = |c|MCD(k, b)$ da cui $c|b$.

7. Trovare $MCD(142, 96)$ e $MCD(212, 176)$ e scriverne delle identità di Bézout.

8. Siano $a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) \neq (0, 0)$. Sia $d = MCD(a, b)$ e $d = \alpha a+\beta b$ un'identità di Bézout. Dimostrare che tutte e sole le identità di Bézout per a, b sono del tipo $d = \left(\alpha + n\frac{b}{MCD(a,b)}\right) a + \left(\beta - n\frac{a}{MCD(a,b)}\right) b$ al variare di $n \in \mathbb{Z}$.

   Basta far vedere che se $d = \alpha' a+\beta' b$ allora $\frac{b}{MCD(a,b)} \mid (\alpha-\alpha')$ e $\frac{a}{MCD(a,b)} \mid (\beta' - \beta)$: infatti se così è $\exists h, k \in \mathbb{Z}$ tali che $\alpha' = \alpha + k\frac{b}{MCD(a,b)}$ e $\beta' = \beta + h\frac{a}{MCD(a,b)}$. Dato che $(\alpha - \alpha')a = (\beta - \beta')b$ allora $h = -k$ e abbiamo concluso.

   Mostriamo allora che $\frac{b}{MCD(a,b)} \mid (\alpha - \alpha')$: $\frac{b}{MCD(a,b)} \big| \frac{b}{MCD(a,b)}(\beta' - \beta) \Rightarrow \frac{b}{MCD(a,b)} \mid \frac{(\alpha-\alpha')a}{MCD(a,b)} \Rightarrow \frac{b}{MCD(a,b)} \mid \frac{a}{MCD(a,b)}(\alpha - \alpha')$. Per il lemma di Euclide si conclude.

9. Si supponga di avere due grandi contenitori non graduati, il primo di 2873 litri, il secondo di 2380 litri e una vasta cisterna vuota. Avendo a disposizione una fontana d'acqua e usando i contenitori è possibile fare in modo che la cisterna alla fine contenga un solo litro d'acqua? Se sì, come? Se no, qual è il minimo numero positivo di litri che la cisterna dovrà necessariamente contenere?