

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL1 - Algebra 1: Fondamenti
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 3 - 23 Ottobre 2008
Elisa Di Gloria, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.

Determinare il dominio e il codominio massimali (i.e. i più grandi possibili), come sottoinsiemi di \mathbb{R} , per i quali le seguenti corrispondenze siano applicazioni biunivoche.

- $f(x) = \sin x$
- $f(x) = \frac{\sin x}{x+1}$
- $f(x) = x^2 + 2x - 8$
- $f(x) = \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2+x}$
- $f(x) = \log(x - 2)$

Esercizio 2.

Provare per induzione:

- Il numero di diagonali di un poligono con k vertici è uguale a $\frac{k(k-3)}{2}$
- $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ con $x \neq 1$
- $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$
- $\sum_{k=1}^n (4k-1) = n(2n+1)$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Esercizio 3.

Dire di quali proprietà godono le seguenti relazioni ed individuare quali di esse sono relazioni di equivalenza.

- Nell'insieme dei cittadini italiani, due persone sono in relazione se e solo se abitano nella stessa città.

Nell'insieme delle rette nel piano:

- $x\rho x' :\Leftrightarrow x$ è parallela e non coincidente a x' ;
- $x\rho x' :\Leftrightarrow x$ è perpendicolare ad x' .

In \mathbb{Z} :

- $x\rho x' :\Leftrightarrow x - x' = 5k \quad \exists k \in \mathbb{Z}$;
- $x\rho x' :\Leftrightarrow |x| = |x'|$;
- $x\rho x' :\Leftrightarrow xx' > 0$;
- $x\rho x' :\Leftrightarrow x$ e x' hanno lo stesso numero di cifre.

Esercizio 4.

Mostrare che le seguenti relazioni sono relazioni di equivalenza:

- In \mathbb{Z} , la relazione: $x\rho x' :\Leftrightarrow x = x'$;
- In \mathbb{Z} , la relazione: $x\rho x' :\Leftrightarrow x$ ha la stessa parità di x' (cioè: x è in relazione con x' se x ed x' sono entrambi pari oppure entrambi dispari);
- In \mathbb{R} , la relazione: $x\rho x' :\Leftrightarrow x = x' + 2kp \quad \exists k \in \mathbb{Z}$ con p primo;
- In \mathbb{R} , la relazione $x\rho x' :\Leftrightarrow [x] = [x']$;
- In \mathbb{R} , la relazione: $x\rho x' :\Leftrightarrow x = x' + k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$;
- Sia X il piano (o lo spazio) Euclideo ed x_0 un punto di X ; nell'insieme $X \setminus x_0$ la relazione: x è allineato con x_0 e con x' ;
- In $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0, 0)$ la relazione: $(x, y)\rho(x', y') :\Leftrightarrow x'^2y = x^2y'$;
- Fissato un insieme S finito non vuoto, in $X := \mathcal{P}(S)$ la relazione: x ha lo stesso numero di elementi di x' .

Esercizio 5.

Utilizzando il Principio di Induzione, provare che, per ogni $n \geq 3$, la seguente espressione: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2(n-1) + 2n$ è uguale ad una soltanto tra le seguenti:

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| (i) $3(n-1)$; | (ii) $\frac{n(n+1)}{2}$; |
| (iii) $n(n+1) - 6$; | (iv) $n(n-1)$. |