Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Correzione della prima prova in itinere

Esercizio 1. $U := \cup_{n\in\mathbb{N}_+} A_n = (0, +\infty)$. Lo dimostreremo per doppia inclusione: per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, $A_n \subseteq (0, +\infty)$ quindi $\cup_{n\in\mathbb{N}_+} A_n \subseteq (0, +\infty)$. Occupiamoci del viceversa: notiamo, prima di tutto, che per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ $\frac{1}{n} \leq 1 \leq n$, quindi $[1, n] \subseteq A_n$ e $[\frac{1}{n}, 1] \subseteq A_n$. Sia ora $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$: allora, data l'osservazione e il fatto che $[x] + 1 \geq x$ si ha che $x \in A_{[x]+1} \Rightarrow x \in U$. Sia ora $x \in \mathbb{R}, x < 1$: dato che $[1/x] + 1 \geq 1/x$ allora $x \geq 1/([1/x] + 1)$ da cui, per l'osservazione, si ha che $x \in A_{[1/x]+1} \Rightarrow x \in U$.

$\cap_{n\in\mathbb{N}_+} \mathbb{R}\setminus A_n =$ (legge di De Morgan) $\mathbb{R}\setminus\cup_{n\in\mathbb{N}_+} A_n = \mathbb{R}\setminus(0, +\infty) = (-\infty, 0]$.

Esercizio 2. Per la nozione di partizione di un insieme si consulti il libro di testo.

Tutte le possibili partizioni di X sono cinque: $P_1 := \{X\}$, $P_2 := \{\{\alpha\}, \{\beta, \gamma\}\}$, $P_3 := \{\{\beta\}, \{\alpha, \gamma\}\}$, $P_4 := \{\{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}\}$, $P_5 := \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}\}$.

Esercizio 3.

i. Ad esempio si definisca $f : Y \to X$ così: $f(1) := a$, $f(2) := b$, $f(3) := c$. f è iniettiva ma non è suriettiva dato che $d \notin f(Y)$.

ii. Ad esempio si definisca $f : X \to Y$ così: $f(a) := 1$, $f(b) := 1$, $f(c) := 2$, $f(d) = 3$. f è suriettiva ma non è iniettiva dato che $f(a) = f(b)$.

iii. Ad esempio si definisca $f : X \to X$ così: $f(a) := a$, $f(b) := a$, $f(c) := a$, $f(d) := a$. f non è suriettiva, dato che ad esempio $b \notin f(X)$, e non è iniettiva, dato che, ad esempio, $f(a) = f(b)$.

Esercizio 4. Chiaramente $f = f \circ id_X = id_X \circ f$.

Se f è iniettiva è cancellabile a sinistra, quindi $f \circ f \circ f = f \circ id_X \Rightarrow f \circ f = id_X$ e perciò f è invertibile. Una funzione è invertibile se e solo se è biiettiva, quindi in particolare f è suriettiva.

Se f è suriettiva è cancellabile a destra, quindi $f \circ f \circ f = id_X \circ f \Rightarrow f \circ f = id_X$ e perciò f è invertibile. Una funzione è invertibile se e solo se è biiettiva, quindi in particolare f è iniettiva.

Attenzione! in generale non è vero che $f \circ f \circ f = f \Rightarrow f \circ f = id$. Si prenda ad esempio un insieme con più di un elemento e una funzione costante su tale insieme.

Esercizio 5. Base dell'induzione: per $n = 0$ si ha $10 + 3 + 5 = 18$ che è divisibile per 9. Supponiamo allora l'asserto vero per n e dimostriamolo per $n + 1$: $10^{n+2} + 3 \cdot 10^{n+1} + 5 = 10(10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5) - 50 + 5 = 10(10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5) - 45$ che è divisibile per 9 dato che lo sono sia $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$ (per l'ipotesi induttiva) che 45.

Esercizio 6. Per gli enunciati degli assiomi di Peano si consulti il libro di testo.

Verifichiamo che $(A, 0, s)$ è un sistema di Peano:

(P1) $0 \in A$;

(P2) s è un'applicazione da A in sé;

(P3) $0 \notin s(A)$: infatti se, per assurdo, $0 = s(a)$ con $a \in A$, allora $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $0 = 3k + 3$, il che non è possibile;

(P4) s è iniettiva: infatti sia $s(a) = s(b)$ con $a, b \in A$. Dato che $\exists h, k \in \mathbb{N}$ tali che $a = 3h$, $b = 3k$, si ha $3h + 3 = 3k + 3$, da cui $h = k$ che implica $a = b$;

(P5) vale il principio di induzione: infatti sia $E \subseteq A$ tale che $0 \in E$ e $s(E) \subseteq E$. Consideriamo l'insieme $I := \{h \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 3h \in E\}$: dato che $0 \in E$ allora $0 \in I$. Inoltre se $n \in I$ allora $3n \in E$, perciò, per l'ipotesi su E, $3n + 3 = 3(n + 1) \in E$ da cui $n + 1 \in I$. Quindi per il principio di induzione del sistema di Peano $\mathbb{N}$, $I = \mathbb{N}$, da cui $E = A$.

Esercizio 7. Per le definizioni di infinito si consulti il libro di testo.

Sia A un insieme infinito secondo Cantor, ovvero esiste una funzione $f : A \to A$ iniettiva ma non suriettiva. Allora $f : A \to f(A)$ è una biiezione e $f(A) \subsetneq A$ dato che f non è suriettiva. Viceversa: supponiamo esista $B \subsetneq A$ e una biiezione $g : A \to B$. Allora, chiamata $i : B \hookrightarrow A$ l'inclusione di B in A, è chiaro che $i \circ g : A \to A$ è una funzione iniettiva (perché composizione di funzioni iniettive) e non suriettiva (perché, essendo $B \subsetneq A$, i non è suriettiva).

Esercizio 8. R_1 non è simmetrica, infatti $(a, b) \in R_1$ ma $(b, a) \notin R_1$. R_1 è riflessiva: $(a, a), (b, b), (c, c) \in R_1$. R_1 è antisimmetrica: né (b, a) né (c, a) appartengono a R_1. R_1 è transitiva: bisogna unicamente controllare che $(a, a) \in R_1, (a, b) \in R_1 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ (vero) e che $(a, b) \in R_1, (b, b) \in R_1 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ (vero).

R_2 è antisimmetrica: né (b, a), né (c, b), né (c, a) appartengono, infatti, a R_2. R_2 è transitiva: bisogna unicamente controllare che $(a, b) \in R_2, (b, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_2$ (vero) . R_2 non è simmetrica: ad esempio $(a, b) \in R_2$ ma $(b, a) \notin R_2$. R_2 non è riflessiva: ad esempio $(a, a) \notin R_2$.

R_3 è simmetrica: infatti sia (a, b) che (b, a) appartengono a R_3. R_3 non è riflessiva: ad esempio $(a, a) \notin R_3$. R_3 non è antisimmetrica: infatti $a \neq b$ ma sia (a, b) che (b, a) appartengono a R_3. R_3 non è transitiva: $(a, b), (b, a) \in R_3$ ma $(a, a) \notin R_3$.

Esercizio 9. Per dimostrare che $\preceq$ è un ordine parziale basta verificare che esso gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva:

riflessiva: per ogni $a \in \mathbb{N}_+$, $a/a = 1 \in \mathbb{N}$, quindi per ogni $a \in \mathbb{N}_+$, $a \preceq a$;

antisimmetrica: se $a \preceq b$ e $b \preceq a$ allora esistono $h, k \in \mathbb{N}$ tali che $a/b = h$ e $b/a = k \Rightarrow 1 = hk \Rightarrow h = k = 1 \Rightarrow a = b$;

transitiva: se $a \preceq b$ e $b \preceq c$ allora, per definizione, $a/b \in \mathbb{N}$ e $b/c \in \mathbb{N}$ da cui $a/c = (a/b) \cdot (b/c) \in \mathbb{N}$, cioè $a \preceq c$.

L'ordine non è totale: ad esempio 2 e 3 non sono confrontabili dato che né $2/3$ né $3/2$ sono numeri interi.

1 è un massimo per $\preceq$: infatti $\forall a \in \mathbb{N}_+$, $a \preceq 1$ dato che $a/1 = a \in \mathbb{N}$.

Non esiste minimo: infatti sia per assurdo $a \neq 0$ minimo per $\preceq$; allora in particolare $a \preceq 2a$ per definizione di minimo, cioè $1/2 = a/(2a) \in \mathbb{N}$, assurdo.

Una catena è un sottoinsieme di $\mathbb{N}_+$ totalmente ordinato. Un esempio di catena con 7 elementi è la seguente: $C := \{2^i | i = 0, \ldots, 6\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. Chiaramente dati due elementi dell'insieme, 2^h e 2^k, o $h \geq k$ o $k \geq h$, quindi o $2^h/2^k \in \mathbb{N}$ oppure $2^k/2^h \in \mathbb{N}$ cioè o $2^h \preceq 2^k$ oppure $2^k \preceq 2^h$, quindi effettivamente $(C, \preceq)$ è totalmente ordinato.