AL210 AA10/11 (Algebra: gruppi, anelli e campi) ESAME DI METÀ SEMESTRE Roma, 2 Novembre 2010.

COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Determinare il numero di elementi di ordine 2 in S_5 e in S_6.

2. Sia $D_4 = \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle \leq S_4$. Determinare tutte le classi laterali destre di D_4 in S_4.

3. Dimostrare che ogni gruppo abeliano con 77 elementi è necessariamente ciclico.

4. Determinare tutti gli omomorfismi tra i gruppi $\mathbf{Z}_{12}$ e $\mathbf{Z}_{30}$.

5. Dimostrare che l'insieme degli automorfismi interni $\mathrm{Inn}(G)$ di un gruppo G è un sottogruppo del gruppo degli automorfismi. Dimostrare che tale gruppo è banale se e solo se il gruppo G è abeliano.

6. Dimostrare che il centro del prodotto diretto di due gruppi è il prodotto dei centri.

7. Dimostrare che se G è un gruppo ciclico finito e $d \mid |G|$, allora G ammette esattamente un sottogruppo con d elementi.

8. Dopo aver calcolato il numero di elementi di $G = \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_5)$, calcolare il numero di elementi del suo centro e dimostrare che ammette un sottogruppo normale di indice 4.