COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

(1) Dopo aver richiamato la definizione di ideale in un anello commutativo unitario, dimostrare che l'intersezione di una qualsiasi famiglia di ideali è un ideale mentre non è detto che l'unione di ideali sia un ideale.

(2) Sia $\mathbf{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbf{Q} \text{ t.c. } p \text{ non divide } n\}$. Verificare che $\mathbf{Z}_{(p)}$ è un sottoanello di $\mathbf{Q}$ e determinarne tutti gli elementi invertibili. Inoltre dimostrare che l'insieme di tutti gli elementi non invertibili forma un ideale.

(3) Dimostrare che in $\mathbf{Z}[i]$ gli elementi $1+2i$, 3 e $1+i$ sono irriducibili. Dedurne la fattorizzazione (unica) di $30 \in \mathbf{Z}[i]$.

(4) Considerare l'applicazione $\Psi : M_2(\mathbf{Z}) \to M_2(\mathbf{Z}_8)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \bmod 8 & b \bmod 8 \\ c \bmod 8 & d \bmod 8 \end{pmatrix}$. Dopo aver verificato che si tratta di un omomorfismo, se ne calcoli il nucleo e l'immagine.

5. Sia $A = \{\frac{n}{9^\alpha} \mid n \in \mathbf{Z}, \alpha \in \mathbf{N}\}$. Dopo aver dimostrato che A è un anello, verificare se il suo campo dei quozienti è $\mathbf{Q}$.

(6) Determinare tutti i divisori dello zero nell'anello $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_6$.

(7) Dopo aver ricordato la definizione di anello euclideo, dimostrare che se K è un campo, allora $K[X]$ è euclideo.

(8) Dimostrare che se $k \in \mathbf{Z}$, il polinomio $X^4 + (2k+1)X + 1 \in \mathbf{Q}[X]$ è irriducibile. *Suggerimento: Ridurre modulo* 2.