COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. È vero che tutti i gruppi ciclici infiniti sono isomorfi?

   ....

   b. È vero che ogni gruppo finito è isomorfo a un sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_2)$ per un opportuno $n \in \mathbf{N}$?

   ....

   c. È vero che due anelli finiti con lo stesso numero di elmementi sono isomorfi?

   ....

   d. È vero che qualsiasi dominio euclideo esiste sempre il massimo comun divisore di due qualsiasi elementi non nulli?

   ....

2. Descrivere tutti i sottogruppi di $S_3 \times \mathbf{Z}_2$.

3. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ è isomorfo a gruppo dei numeri complessi di norma 1.

4. Sia $\varphi : G \to H$ un omomorfismo di gruppi finiti. Dimostrare che per ogni $x \in G$, l'ordine $\mathrm{o}(x)$ è un divisore di $o(\varphi(x))$ e che se $o(\varphi(x)) = o(x)$ per ogni $x \in G$, allora φ è iniettivo.

5. Sia $G = \mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}_5)$. Dopo aver determinato il centro di G e l'ordine di G, determinare un sottogruppo non abeliano di G con 125 elementi.

6. Dopo aver fornito la definizione di dominio a ideali principali (PID), dimostrare che se A è un PID, allora per ogni $a, b \in A^*$ esiste un $\mathrm{MCD}(a, b)$.

7. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ 4b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{Z}_8 \right\}$. Dopo aver verificato che A è un sottoanello di $M_2(\mathbf{Z}_8)$, contarne il numero di elementi e dire se A è un dominio di integrità.

8. Determinare tutti i divisori dello zero dell'anello $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[X]/(x^2 - 1)$.