COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. È vero che tutti i gruppi con 101 elementi sono ciclici?

   ....

   b. È vero che S_4 contiene due sottogruppi con 4 elementi tra di loro non isomorfi?

   ....

   c. È vero esistono anelli non commutativi in cui tutti gli elementi non nulli sono invertibili?

   ....

   d. È vero che esistono anelli a fattorizzazione unica in cui non tutti gli ideali sono principali?

   ....

2. Dopo aver definito la nozione di sottogruppo, dimostrare che $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ (p primo) ammette esattamente $p + 3$ sottogruppi.

3. Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo. Dimostrare che $N_G(H) := \{g \in G : gH = Hg\}$ è un sottogruppo di G che contiene H come sottogruppo normale.

4. Immergere il gruppo di Klein $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ nel gruppo S_8 delle permutazioni su 8 elementi.

5. Sia S un insieme non vuoto, A un anello commutativo, $(A^S, +, \cdot)$ l'anello delle applicazioni di S in A con le operazioni definite puntualmente. Si dimostri che se I è un ideale di A, allora $\{f \in A^S : f(S) \subseteq I\}$ è un ideale di A^S.

6. Dopo aver fornito la definizione di dominio di dominio Euclideo (ED), dimostrare che se A è un campo, allora l'anello dei polinomi $K[X]$ è un PID.

7. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{Z}_4 \right\}$. Dopo aver verificato che A è un sottoanello di $M_2(\mathbf{Z}_4)$, contarne il numero di elementi, determinare il gruppo $U(A)$ e verificare se $U(A) \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

8. Sia A un anello commutativo (unitario). Si dimostri che $J_0 := \{z \in A : z^n = 0, \text{ per qualche } n \in \mathbf{N}^+\}$ è un ideale di A. Dimostrare poi che ogni ideale primo di A contiene J_0.