COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. È vero che esistono almeno due gruppi non isomorfi con 49 elementi?

   ....

   b. È vero che se $n \geq k+1$, S_n contiene sempre un sottogruppo isomorfo a S_{n-k}?

   ....

   c. È vero esistono domini di integrità finiti che non sono campi?

   ....

   d. È vero che se A è un anello, allora $U(A[X]) = U(A)$?

   ....

2. Dimostrare che se G è un gruppo ciclico e $n \mid |G|$, allora G ammette un unico sottogruppo con n elementi.

3. Sull'insieme $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ consideriamo la legge di composione $(*)$ definita nel modo seguente:(1)

$$(a; b) * (c; d) = (a + c; (-1)^c b + d)$$

Dimostrare che $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}; *)$ è un gruppo (non commutativo) determinandone il centro.

4. Dimostrare che i gruppi $(\mathbf{Q}^*, \times)$ e $(\mathbf{Z}[X], +)$ sono isomorfi.

5. Sia dato lanello $\mathbf{Z}_{15}, +, \times, [1]_{15}$. Sia B linsieme dei multipli di 3, ossia

$$B = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}.$$

Si provi che B un campo rispetto alle operazioni $+$ e $\times$ di $\mathbf{Z}_{15}$, ma non un suo sottoanello. Chi il suo elemento unità?.

6. Dopo aver fornito la definizione di caratteristica di un anello commutativo con unità, si determini la caratteristica dei seguenti anelli: $\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{28}$, $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_8$, $\mathbf{F}_{81}$ ($\mathbf{F}_{81}$ indica un campo con 81 elementi).

7. Dopo aver fornito la definizione di anello a ideali principali (PID), si dimostri che $\mathbf{Z}[i]$ è un PID.

8. Sia dato linsieme delle matrici ad elementi reali, quadrate dordine $n > 1$ e triangolari superiori:

$$T = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A = [a_{ij}], a_{ij} = 0 \ \forall i > j\}.$$

   a) Si dimostri che costituisce un anello rispetto alle consuete operazioni di addizione e di moltiplicazione righe per colonne fra matrici.
   b) Si tratta di un dominio d'integrità?.