COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. È vero che $(\mathbf{Z}, +)$ è (a meno di isomorfismi) l'unico gruppo ciclico infinito?

   ....

   b. È vero che se $H_1, H_2 \le S_n$ e $\#H_1 = \#H_2$ allore $H_1 \cong H_2$?

   ....

   c. È vero esistono corpi infiniti non commutativi?

   ....

   d. È vero che se K è un campo, allora $U(K[X]) = K^*$?

   ....

2. Dimostrare che se G è un gruppo abeliano con 35 elementi, allora è necessariamente ciclico.

3. Si considerino i seguenti insiemi: $G_1 = (\{3^a 5^b, a, b \in \mathbf{Z}\}, \cdot)$, sottogruppo di $(\mathbf{Q}, \cdot)$ e $G_2 = (\{a + ib, a, b \in \mathbf{Z}\}, +)$ sottogruppo di $(\mathbf{C}, +)$. Dopo aver dimostrato che sono gruppi ed averne individuato gli elementi neutri, si dimostri che G_1 e G_2 sono isomorfi.

4. Dopo aver enunciato il Teorema di Lagrange per gruppi finiti, considerare $D_4 = \langle (1,2,3,4),(1,3) \rangle \leq S_4$. Determinare tutte le classi laterali destre di D_4 in S_4.

5. Si consideri l'insieme
$$A = \left\{ \frac{m}{1+2n}, m, n \in\in \mathbf{Z} \right\}.$$
Dimostrare che A, con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione tra numeri, è un anello commutativo. Determinare $U(A)$ e dimostrare che $A \setminus U(A)$ è un ideale di A

6. Dopo aver richiamato la defnizione di ideale in un anello commutativo unitario, dimostrare che l'intersezione di una qualsiasi famiglia di ideali è un ideale mentre non è detto che l'unione di ideali sia un ideale.

7. Dopo aver fornito la definizione di dominio euclideo (ED), si dimostri che $\mathbf{Z}[i]$ è un ED e calcolare la fattorizzazione unica di 10 in $\mathbf{Z}[i]$

8. Considerare $f(x) = X^2 + 1 \in \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}[X]$. Dimostrare che $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}[X]/f(X)$ non è un campo esibendo un elemento che non è invertibile. Quanti elementi ha $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}[X]/f(X)$?