Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 2 (13 Ottobre 2010)

Esercizio 1. Sia $G := GL_3(\mathbb{Z}_2)$ il gruppo delle matrici invertibili 3×3 a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$.

(a) Si scrivano esplicitamente i seguenti sottogruppi di G e si stabilisca se sono normali in G:

$$SL_3(\mathbb{Z}_2), \quad \Lambda_3(\mathbb{Z}_2), \quad D_3(\mathbb{Z}_2), \quad T_3^+(\mathbb{Z}_2), \quad O_3(\mathbb{Z}_2).$$

(b) Determinare se esistono in G un sottogruppo di ordine 3 e uno di ordine 7. In caso affermativo fornirne un esempio.

Esercizio 2. Sia G un gruppo, H un sottogruppo di G ed N un sottogruppo normale di G. Dimostrare che $H \cap N$ è un sottogruppo normale di H. Stabilire se $H \cap N$ è normale anche in N e/o in G.

Esercizio 3. Siano G un gruppo e H, K sottogruppi di G. Dimostrare che:

(a) $HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$ è un sottogruppo di G se e solo se $HK = KH$;

(b) se H è normale in G, allora HK è un sottogruppo di G;

(c) se H e K sono normali in G allora HK è normale in G.

Esercizio 4. Sia G un gruppo. Dati comunque due elementi $a, b \in G$ si definisca il *commutatore* di a e b come:

$$[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab.$$

Si dimostri che il sottogruppo di G generato dall'insieme dei commutatori è un sottogruppo normale di G, detto *derivato* di G.

Esercizio 5. Si calcolino il centro di A_4 e del gruppo di Heisenberg $H_3(\mathbb{Z})$.

Esercizio 6. Siano N, M due sottogruppi normali di un gruppo G. Dimostrare che se $N \cap M = \{e_G\}$ allora per ogni $n \in N$ ed $m \in M$ si ha $nm = mn$.

Esercizio 7. Sia N un sottogruppo normale di G tale che $|N| = 2$. Dimostrare che allora $N \subseteq Z(G)$.

Esercizio 8. Dato il gruppo $(\mathbb{Q}, +)$ si descriva il quoziente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Stabilire inoltre se tale quoziente è un gruppo ciclico.

Esercizio 9. Si consideri il sottogruppo $D_4 :=< (1234), (12)(34) >$ di S_4.

(a) Stabilire quanti elementi ha D_4.

(b) Calcolare $Z(D_4)$.

(c) Descrivere il quoziente $D_4/Z(D_4)$ e stabilire se è ciclico.