**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011**
**AL210 - Algebra 2**
**Esercitazione 2 (13 Ottobre 2010)**

**Esercizio 1.** Sia $G := GL_3(\mathbb{Z}_2)$ il gruppo delle matrici invertibili $3 \times 3$ a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$.

(a) Si scrivano esplicitamente i seguenti sottogruppi di $G$ e si stabilisca se sono normali in $G$:

$$SL_3(\mathbb{Z}_2), \quad \Lambda_3(\mathbb{Z}_2), \quad D_3(\mathbb{Z}_2), \quad T_3^+(\mathbb{Z}_2), \quad O_3(\mathbb{Z}_2).$$

(b) Determinare se esistono in $G$ un sottogruppo di ordine 3 e uno di ordine 7. In caso affermativo fornirne un esempio.

**Soluzione**:

(a) I primi 3 sottogruppi richiesti sono banali, rispettivamente: $SL_3(\mathbb{Z}_2) = G$, mentre $\Lambda_3(\mathbb{Z}_2) = D_3(\mathbb{Z}_2) = \{I_3\}$. Non sono quindi sottogruppi normali propri.

Il sottogruppo $T_3^+(\mathbb{Z}_2)$ ha 8 elementi e non è normale, è formato dalle matrici della forma:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

al variare di $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$.

Il sottogruppo delle matrici ortogonali è il seguente e non è normale:

$$\left\{ I_3, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, {}^tA, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Per il primo dei teoremi di Sylow esistono sia un sottogruppo di ordine 3 che uno di ordine 7. Entrambi sono chiaramente ciclici e sono generati rispettivamente da $A$ e $B$, dove:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2.** Sia $G$ un gruppo, $H$ un sottogruppo di $G$ ed $N$ un sottogruppo normale di $G$. Dimostrare che $H \cap N$ è un sottogruppo normale di $H$. Stabilire se $H \cap N$ è normale anche in $N$ e/o in $G$.

**Soluzione**: Affinché $H \cap N$ sia normale in $H$ si deve avere $h^{-1}(H \cap N)h = H \cap N$, per ogni $h \in H$ oppure, equivalentemente, $hxh^{-1} \in H \cap N$ per ogni $h \in H$ e $x \in H \cap N$. È subito visto che: $h^{-1}xh \in H$, in quanto prodotto di elementi di $H$ che è un sottogruppo e $h^{-1}xh \in N$, essendo $N$ normale in $G$.

Non è vero che $H \cap N$ è normale in $N$, basta prendere $N = G$ ed $H$ un sottogruppo non normale di $G$ (e.g. $G = N = S_4$ ed $H = V_4$).

Non è vero che $H \cap N$ è normale in $G$, si può utilizzare il medesimo esempio di sopra, oppure scegliere $G = S_4$, $N = A_4$ ed $H = V_4$.

**Esercizio 3.** Siano $G$ un gruppo e $H, K$ sottogruppi di $G$. Dimostrare che:

(a) $HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$ è un sottogruppo di $G$ se e solo se $HK = KH$;

(b) se $H$ è normale in $G$, allora $HK$ è un sottogruppo di $G$;

(c) se $H$ e $K$ sono normali in $G$ allora $HK$ è normale in $G$.

**Soluzione**:

(a) Supponiamo $HK \leq G$, allora $H, K \subseteq HK$ da cui $kh \in HK$ per ogni $k \in K$ e $h \in H$, ovvero $KH \subseteq HK$. Sia ora $x \in HK$, poiché $HK$ è un gruppo anche $x^{-1} \in HK$, dunque se $x = hk$ per certi $h \in H$ e $k \in K$, si ha che $x^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$. Poiché ciò vale per ogni $x \in HK$ si ha che $HK \subseteq KH$.
Supponiamo viceversa che $HK = KH$. $1 \in HK$ e se $x \in HK$, $x = hk$ per un qualche $h \in H$ e $k \in K$. Ne segue che $y := k^{-1}h^{-1} \in KH = HK$ e $xy = 1$. Facciamo vedere che se $x, y \in HK$ anche $xy \in HK$; sia $x = hk$ e $y = h_1k_1$, allora $xy = hkh_1k_1 = h(h'k')k_1$ dato che $HK = KH$, dunque $xy = (hh')(k'k_1) \in HK$.

(b) Dal fatto che $H$ è normale segue che $HK = KH$ e dunque è un sottogruppo di $G$.

(c) Se $H$ e $K$ sono normali in $G$ si ha, per ogni $g \in G$:

$$gHK = HgK = HKg.$$

□

**Esercizio 4.** Sia $G$ un gruppo. Dati comunque due elementi $a, b \in G$ si definisca il *commutatore* di $a$ e $b$ come:

$$[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab.$$

Si dimostri che il sottogruppo di $G$ generato dall'insieme dei commutatori è un sottogruppo normale di $G$, detto *derivato* di $G$.

**Soluzione**: È sufficiente dimostrare che il coniugio porta generatori di $G'$ in generatori di $G'$, ovvero che il coniugato di un commutatore è ancora un commutatore. Dati comunque $x, a, b \in G$ si ha:

$$x^{-1}[a, b]x = [x^{-1}ax, x^{-1}bx],$$

che era quanto richiesto.

**Esercizio 5.** Si calcolino il centro di $A_4$ e del gruppo di Heisenberg $H_3(\mathbb{Z})$.

**Soluzione**: Il centro di $A_4$ è banale. Invece il centro del gruppo di Heisenberg è ciclico, generato dalla matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.** Siano $N, M$ due sottogruppi normali di un gruppo $G$. Dimostrare che se $N \cap M = \{e_G\}$ allora per ogni $n \in N$ ed $m \in M$ si ha $nm = mn$.

**Soluzione**: Poiché $M$ ed $N$ sono normali, certamente $NM = MN$, inoltre, dati $n \in N$ ed $m \in M$, allora $nm = m'n$ per qualche $m' \in M$, e anche $nm = mn'$ per qualche $n' \in N$. Ne segue che $m'n = mn'$, ovvero $m^{-1}m' = n'n^{-1} \in N \cap M = \{e_G\}$. E dunque $m = m', n = n'$.

**Esercizio 7.** Sia $N$ un sottogruppo normale di $G$ tale che $|N| = 2$. Dimostrare che allora $N \subseteq Z(G)$.

**Soluzione**: Se $N$ ha soli due elementi, necessariamente $N = \{e_G, x\}$, con $x \neq e_G$. Sia $g \in G \setminus N$, chiaramente $ge_G = e_G g = g$ ed essendo $N$ normale si deve avere $gxg^{-1} \in N$. Il caso $gxg^{-1} = e_G$ è escluso perché altrimenti $x = e_G$, quindi $gx = xg$ ed $N \subseteq Z(G)$.

**Esercizio 8.** Dato il gruppo $(\mathbb{Q}, +)$ si descriva il quoziente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Stabilire inoltre se tale quoziente è un gruppo ciclico.

**Soluzione**: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \left\{\frac{a}{b} + \mathbb{Z} : b > a > 0,\, \gcd(a, b) = 1\right\}$. Ogni elemento $\frac{a}{b} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ha ordine finito, infatti

$$(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}) + \overset{b-\text{volte}}{\cdots} + (\frac{a}{b} + \mathbb{Z}) = b\frac{a}{b} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}.$$

Poiché $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ha infiniti elementi ed ognuno di essi ha ordine finito, il gruppo non può essere ciclico.

**Esercizio 9.** Si consideri il sottogruppo $D_4 :=< (1234), (12)(34) >$ di $S_4$.

(a) Stabilire quanti elementi ha $D_4$.

(b) Calcolare $Z(D_4)$.

(c) Descrivere il quoziente $D_4/Z(D_4)$ e stabilire se è ciclico.

**Soluzione**:

(a) È noto che $D_n$ ha $2n$ elementi.

(b) Sia $n \geq 3$, il gruppo diedrale $D_n$ è generato da due elementi distinti $\rho, \sigma$ tali che $o(\rho) = n, o(\sigma) = 2$ e $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$. Quindi

$$D_n = \{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \ldots, \rho^{n-1}\sigma\}$$

e $x \in Z(D_n) \Leftrightarrow x$ commuta sia con $\rho$ che con $\sigma$.

Determiniamo gli elementi di $D_n$ che commutano con $\sigma$, ricercandoli

(a) tra gli elementi del tipo $\rho^k$ con $0 \leq k \leq n-1$;

(b) tra gli elementi del tipo $\rho^k\sigma$ con $0 \leq k \leq n-1$.

(a) $\rho^k\sigma = \sigma\rho^k \Leftrightarrow \rho^k = \rho^{-k} \Leftrightarrow \rho^{2k} = 1 \Leftrightarrow n|2k$. Perciò distinguiamo i seguenti due casi:

  i. $n$ dispari: allora $n|2k \Leftrightarrow n|k \Leftrightarrow k = 0$;

  ii. $n$ pari: allora $n|2k \Leftrightarrow n/2|k \Leftrightarrow k = 0, n/2$.

(b) Analogamente a quanto appena visto possiamo distinguere i seguenti due casi:

  i. $n$ dispari: allora $k = 0$;

  ii. $n$ pari: allora $k = 0, n/2$.

Quindi, riassumendo: tutti e soli gli elementi di $D_n$ che commutano con $\sigma$ sono:

i. $n$ dispari: $1, \sigma$;

ii. $n$ pari: $1, \rho^{n/2}, \sigma, \rho^{n/2}\sigma$.

Tra questi elementi scegliamo quelli che commutano anche con $\rho$:

i. $n$ dispari: dato che $\rho\sigma = \sigma\rho \Leftrightarrow \rho^2 = 1$ e dato che $n \geq 3$ allora solo 1 commuta sia con $\rho$ che con $\sigma$;

ii. $n$ pari: $1, \rho^{n/2}$ commutano con $\sigma$ e con $\rho$, mentre, come prima, si puó vedere che $\sigma$ e $\rho^{n/2}\sigma$ non commutano con $\rho$.

Ricapitolando: se $n$ è dispari allora $Z(D_n) = \{1\}$, mentre se $n$ è pari $Z(D_n) = \{1, \rho^{n/2}\}$. Ad esempio: $D_4 = \langle (1234), (12)(34) \rangle$ e $Z(D_4) = \{id, (13)(24)\}$.

(c) Il quoziente $D_4/Z(D_4)$ è isomorfo al gruppo di Klein $V_4$. Ogni elemento diverso dall'elemento neutro ha ordine 2 e dunque non è ciclico.