Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 6 (6 Dicembre 2010)

Esercizio 1. Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che $f(X) \in A[X]$ è nilpotente se e solo se tutti i coefficienti di $f(X)$ sono nilpotenti.

Soluzione: Cf. libro di testo Esercizio 11.2 (e relativa soluzione).

Esercizio 2. Sia A un dominio. Dimostrare che $U(A[X]) = U(A)$. Resta vera questa uguaglianza quando A non è un dominio?

Soluzione: Supponiamo A dominio. Allora in $A[X]$ vale la *formula del grado*, ovvero se $f(X), g(X) \in A[X]$ con $\deg(f) = n$ e $\deg(g) = m$, si ha che $\deg(fg) = m + n$. Poiché $\deg(1) = 0$ e il grado è un intero maggiore o uguale a zero, per avere $f(X)g(X) = 1$ deve essere $\deg(fg) = m + n = 0 = \deg(1)$. Dunque f e g devono essere polinomi costanti, e quindi elementi di A. Da cui $U(A[X]) \subseteq U(A)$. L'inclusione opposta è banale poiché $A \subseteq A[X]$.

Se A non è un dominio l'uguaglianza non è necessariamente verificata. Basta prendere come esempio in $\mathbb{Z}_9[X]$ il polinomio $f(X) := (\overline{3}X + \overline{1})$ e osservare che $f(X)(\overline{3}X - \overline{1}) = \overline{1}$. Ne segue che $f(X)$ è un polinomio invertibile e non costante.

Esercizio 3. Dimostrare che gli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ e $\mathbb{Z}[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}]$ sono domini euclidei.

Soluzione: Per il caso $\mathbb{Z}[i]$ si veda il Teorema 11.39 del libro di testo.

Per il caso $\mathbb{Z}[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}]$ si adoperi lo stesso procedimento di $\mathbb{Z}[i]$ ponendo per ogni elemento non nullo $z = a + b(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}) \in \mathbb{Z}[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}]$, $\delta(z) := a^2 - ab + b^2$.

Esercizio 4. Dimostrare che un dominio euclideo è principale.

Soluzione: Cf. Teorema 11.36 del libro di testo.

Esercizio 5. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ non è euclideo.

Soluzione: Facciamo vedere che $D := \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ non è principale. Poiché $D \subseteq \mathbb{C}$, sugli elementi di D resta indotta la norma complessa. Consideriamo l'ideale $I := (2, 1 + \sqrt{-3})$ e supponiamo per assurdo che I sia principale. Allora deve esistere $z \in D$ tale che $zD = I$. In particolare $I \subseteq zD$ e si deve avere $2, 1 + \sqrt{-3} \in zD$.

Ne segue che $2 = zx$ e $1 + \sqrt{-3} = zy$, esistono $x, y \in D$. Poiché la norma è moltiplicativa si ha inoltre che $N(1 + \sqrt{-3}) = 4 = N(2) = N(z)N(x) = N(z)N(y)$. E dunque la norma di $z = 1, 2, 4$. Se z ha norma 1, allora z è invertibile ed è uguale a ± 1, da cui $zD = D \supsetneq I$ che è assurdo. Allora la norma di z è uguale a 2 oppure 4. Se z avesse norma 4, $N(x) = N(y) = 1$, ovvero $x, y \in U(D)$ e $2 \sim z \sim 1 + \sqrt{-3}$ che non è possibile perché $2 \not\sim 1 + \sqrt{-3}$.

Inoltre in D non esistono elementi di norma 2, perché si dovrebbe avere $a^2+3b^2=2$ con $a,b\in\mathbb{Z}$, che non è possibile. Avendo escluso tutte le possibilità per i valori di $N(z)$ possiamo concludere che I non è principale in D.

Esercizio 6. Sia $z=a+ib\in\mathbb{Z}[i]$ e $\delta(z)=a^2+b^2$ la norma di z. Dimostrare che se $\delta(z)$ è un numero primo, allora z è irriducibile.

Soluzione: Sia $z\in\mathbb{Z}[i]$ tale che $\delta(z)=p$ primo. Poiché δ coincide con la norma complessa, se $z=xy$ si ha anche $\delta(z)=\delta(x)\delta(y)$. Ovvero $p=\delta(x)\delta(y)$ e quindi $\delta(x)=\pm p$ oppure $\delta(y)=\pm p$. Quindi $x\sim z$, oppure $y\sim z$ e z è irriducibile.

Esercizio 7. Sia A un dominio euclideo e $a,b\in A^*$. Dimostrare che se b divide a e $\delta(b)=\delta(a)$, allora a e b sono associati.

Soluzione: Per ipotesi b divide a, dobbiamo far vedere che a divide b. Poiché A è euclideo esistono $q,r\in A$ tali che $b=aq+r$ con $r=0$, oppure $\delta(r)<\delta(a)=\delta(b)$.

Se $r=0$, a divide b e abbiamo finito. Altrimenti $r=b-aq=b-bxq$ perché b divide a, quindi $\delta(r)=\delta(b-aq)=\delta(b(1-xq))\geq\delta(b)=\delta(a)$ che non è possibile.

Esercizio 8. Dimostrare che ogni intero n somma di due quadrati è riducibile in $\mathbb{Z}[i]$.

Soluzione: Sia $n=a^2+b^2$. È immediato verificare che $n=(a+ib)(a-ib)$ e dunque $(a+ib)$ ed $(a-ib)$ sono fattori propri di n.