**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011**
**AL210 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi**
**Prof. F. Pappalardi**
**Tutorato 10 - 13 Dicembre 2010**
**Tutore: Matteo Acclavio**
www.matematica3.com

**Esercizio 1.**
Sia $K$ un campo e consideriamo l'anello $A = K[X;Y]/(X^2;Y^2)$.

- Dette $x$ e $y$ le classi di $A$ determinate da $X$ e $Y$ , provare che ogni elemento di $A$ si può esprimere in un unico modo nella forma:
  $axy + bx + cy + d$ con $a, b, c, d \in K$
- Calcolare il prodotto tra due elementi di $A$ generici.
- Determinare gli zero divisori di $A$.
- Determinare gli invertibili di $A$.

**Esercizio 2.**
Sia $D$ un dominio euclideo e $v : D^* \to \mathbb{N}$ la sua valutazione, mostrare che:

- $v(1) = v(u) \forall u \in \mathcal{U}(D)$
- $v(1) \leq v(a)\ \forall a \in A$
- $x|y \Leftrightarrow v(x) \leq v(y)$

**Esercizio 2.**
Sia $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi\ |a, b \in \mathbb{Z},\ i^2 = -1\}$ e sia $|\cdot| : \mathbb{Z}[i]^* \to \mathbb{N}$ tale che $|(a + ib)| = a^2 + b^2$ il modulo su $\mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che:

- $\mathbb{Z}[i]$ è isomorfo a $\frac{Z[x]}{(x^2+1)}$
- $\mathbb{Z}[i]$ è un dominio euclideo (verificare se il modulo rispetta le proprietà della valutazione)

**Esercizio 3.**
Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ non è un UFD