Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 11 - 20 Dicembre 2010
Tutore: Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Sia A un dominio a ideali principali e sia $p \in A$ un elemento irriducibile. Mostrare che ogni elemento $a \in A \setminus \{0\}$ si può scrivere come $a = px + b$, dove $x \neq 0$ e $b = 0$ oppure p non divide b.

Esercizio 2.
Nell'anello degli interi di gauss sia $\alpha = 13 + 5i$ e $\beta = 8 + 9i$. Sia $I = (\alpha)$ e $J = (\beta)$.

- Determinare una fattorizzazione di α e β
- Determinare $MCD(\alpha, \beta)$
- Detminare $I \cup J$ e $I + J$

Esercizio 3.
Effettuare la divisione euclidea tra $13 + 18i$ e $5 + 3i$ in $\mathbb{Z}[i]$.
Mostrare che i possibili quozienti (ed i rispettivi resti) sono quattro.

Esercizio 4.
Sia $f(X) := 2X^3 + X^2 + 1$ e $A := \mathbb{Z}_3[X]/(f(X))$.

- Mostrare che A ha zero divisori;
- Mostrare che $\alpha := X^3 + (f(X))$ è invertibile in A e determinare il suo inverso.

Esercizio 5.
Si consideri l'insieme $I := \{m + ni \mid m, n \ \ pari\} \subseteq \mathbb{Z}[i]$.

- Dimostrare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$
- Trovare un generatore di I
- Determinare se I è primo
- Determinare se I è massimale
- Scrivere esplicitamente gli elementi di $\mathbb{Z}[i]/I$ e determinare quali sono invertibili e quali zero divisori

Esercizio 6.
Si considerino $A[X]$ e $f(x), g(x) \in A[X]$ come indicati in seguito. Per ogni coppia di polinomi nell'anello indicato determinare $d(x) := MCD(f(x), g(x))$ e due polinomi $a(x)$ e $b(x) \in A[X]$ tali che $d(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$.

- $A = \mathbb{Q}$ $\quad f(x) = x^8 - 1$ $\quad g(x) = x^6 - 1$
- $A = \mathbb{Q}$ $\quad f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ $\quad g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$
- $A = \mathbb{Q}$ $\quad f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 1$ $\quad g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
- $A = \mathbb{C}$ $\quad f(x) = x^{10} + 7x^5$ $\quad g(x) = 2x^7 + 4x$
- $A = \mathbb{Z}_2$ $\quad f(x) = x^7 + 1$ $\quad g(x) = x^3 + x$
- $A = \mathbb{Q}$ $\quad f(x) = x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$ $\quad g(x) = x^4 - 1$
- $A = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ $\quad g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$