Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 2 - 4 Ottobre 2010
Tutore: Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Dimostrare che se G è un gruppo privo di sottogruppi non banali allora è finito ed ha ordine p con p primo.

Esercizio 2.
Dimostrare che $\mathbb{Z} = \langle p, q \rangle$ con p, q primi.

Esercizio 3.
Dimostrare che i numeri primi generano $\mathbb{Q}^*$.

Esercizio 4.
Sia G un grppo finito di ordine m, dimostrare le seguenti proprietà:

- $H \leq G$ è l'unico sottogruppo di ordine $n \Rightarrow H \lhd G$;
- $(G : H) = 2 \Rightarrow H \lhd G$.

Esercizio 5.
Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Dimostrare che se $\forall\, g \in G$ si ha che $g \cdot g = 1$ allora G è abeliano.

Esercizio 6.
Verificare che l'insieme dei polinomi a coefficienti in K campo e l'insieme dei polinomi a coefficenti in $\mathbb{Z}$, con l'operazione di somma, sono e un gruppo.
Stabilire se sono abeliani e dimostrare che non sono ciclici.
Stabilire, inoltre, se $\langle 2, X \rangle = \langle 3, X \rangle = \langle 3X \rangle$ e descrivere esplicitamente gli elementi dei due sottogruppi.

Esercizio 7.
Determinare tutti i sottogruppi, e le loro relative classi destre e sinistre, dei seguenti gruppi verificando il teoreama di Lagrange. Verificare, inoltre, che le classi laterali formano una partizione del gruppo. Siano:

- $(\mathbb{Z}_{18}, +)$;
- $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$;
- $(\mathcal{F}^*_{[0,1]}, \circ)$ dove $\mathcal{F}^*_{[0,1]}$ è l'insieme delle funzioni $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \neq 0\ \forall x \in [0, 1]$.

Esercizio 8.
Sia $G = GL_3(K)$ ove K è un campo con 5 elementi. Calcolare l'ordine di G e dimostrare che:

- Il gruppo delle matrici diagonali è un sottogruppo non normale di G e se ne determini l'ordine;
- Il gruppo delle matrici scalari è un sottogruppo normale di G e se ne determini l'ordine;
- Il gruppo delle matrici triangolari (superiori o inferiori) è un sottogruppo non normale di G e se ne determini l'ordine;
- Il gruppo delle matrici triangolari con tutti 1 sulla diagonale è un sottogruppo non normale di G e se ne determini l'ordine;
- Il gruppo delle matrici con determinante 1 è un sottogruppo normale di G e se ne determini l'ordine.

In ciascuno dei casi sopra, si stabiliscano eventuali inclusioni dei gruppi presi in considerazione e si dica se essi sono normali negli eventuali gruppi contenenti.
Per chi soffre di insonnia: Ripetere quanto fatto sopra per un generico $GL_n(\mathbb{F}_q)$.