Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 3 - 11 Ottobre 2010
Tutore: Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Sia $(G, \cdot)$ un gruppo abeliano e $a, b \in G$ dimostrare se sono vere le seguenti affermazioni (in caso contrario fornire un controesempio):

- $o(a) = m, o(b) = n \Rightarrow o(ab) = MCD(n, m)$.
- $o(a) = \infty,\ o(b)$ finito $\Rightarrow o(ab) = \infty$.
- $o(a) = \infty,\ o(b) = \infty \Rightarrow o(ab) = \infty$

Esercizio 2.
Sia $(G, \cdot)$ gruppo e $\sim_\gamma$ la relazione così definita: $g \sim_\gamma h \Leftrightarrow g = x^{-1}hx\ \exists x \in G$.
Dimostare che $\sim_\gamma$ è una relazione di equivalenza

Esercizio 3.
Sia G un gruppo e sia $x \in G$. Mostrare che:

i) L'insieme $C(x) := \{g \in G \mid gx = xg\}$ è un sottogruppo di G. Questo sottogruppo si chiama il *centralizzante* di x.

ii) $C(x)$ può non essere normale in G;

iii) $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C(x)$;

iv) $gxg^{-1} = hxh^{-1}$ se e soltanto se $gC(x) = hC(x)$. Dedurne che il numero dei coniugati distinti di x è $|G| / |C(x)|$.

Esercizio 4.
Dimostrare se N è normale in H e se H è normale in $GL_2(\mathbb{R})$ dove:
$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |b \in \mathbb{R} \right\}$
$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} |a, b, c \in \mathbb{R} ab \neq 0 \right\}$.

Esercizio 5.
Dimostrare che H è normale in V_4 e V_4 è normale in A_4 ma H non è normale in A_4dove:
$H =< (12)(34) >$
$V_4 =< (12)(34), (14)(23) >$