**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011**
**AL210 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi**
**Prof. F. Pappalardi**
**Tutorato 4 - 18 Ottobre 2010**
**Tutore: Matteo Acclavio**
www.matematica3.com

**Esercizio 2.**
Sia $G := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3, a \neq 0, b \neq 0 \right\}$
Provare che:

- $G$ con l'usuale moltiplicazione fra matrici è un gruppo e dire se $G$ è abeliano.
- $H := \{M \in G \mid det(M) = 1\}$ è un sottogruppo di $G$.
- $H$ è un sottogruppo normale.
- $H$ è ciclico e trovare un suo generatore.
- Ogni elemento di $G$ che non sta in $H$ ha ordine 2.
- Determinare il centro di $G$.

**Esercizio 3.**
Sia $f_n : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ definita da $f_n(x) = nx$. Verificare che $f_n$ é un omomorfismo, trovare il nucleo e l'immagine di $f_n$.

**Esercizio 4.**
Mostra che l'applicazione $Re : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ definita da $Re(a + ib) = a$ è un omomorfismo di gruppi. Determinarne il nucleo $N$ e l'immagine $H$. Applicando il teorema di omomorfismo, definire l'isomorfismo canonico.

**Esercizio 5.**
Sia $G$ un gruppo e sia $H$ un suo sottogruppo. Definiamo $N(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$. Dimostrare che $N(H)$ è un sottogruppo di $G$ e che $H$ è normale in $N(H)$. $N(H)$ si dice *normalizzante* di $H$ in $G$ ed è il più grande sottogruppo di $G$ in cui $H$ è normale (verificare che se $H$ normale in $G$ allora $N(H) = G$).

**Esercizio 6.**
Sia $\varphi : G \longrightarrow G'$ omomorfismo. Dimostrare che:

- $\forall g \in G,\ o(g) \mid |G|$

- $\forall g' \in G',\ o(g') \mid |G'|$
- $\forall g \in G,\ o(\varphi(g)) \mid o(g)$
- se $G =< g >$ allora $\varphi(G) =< \varphi(g) >$

Determinare gli elementi di $Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \{$omomorfismi da $\mathbb{Z}_n$ in $\mathbb{Z}_m\}$.
Dimostrare che il gruppo $Aut(Z_n)$ è isomorfo a $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n), \cdot)$