Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 7 - 15 Novembre 2010
Tutore: Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Sia $A = R_1 \times R_2$ dove R_i è un anello commutativo unitario locale (con un unico ideale massimale M_i), dimostrare che:

- $I_1 = R_1 \times M_2$, $I_2 = M_1 \times R_2$, sono gli unici ideali massimali di A
- $M = M_1 \times M_2$ è un ideale non massimale di A (non è primo)

Sia $\pi : A \to \frac{A}{M}$ la proiezione canonica ($\pi(a) = a + M$)

- Dimostrare che π è un ben definito omomorfismo suriettivo
- Dimostrare che $\pi(I_i)$ sono gli unici ideali massimali di $\pi(A)$ per $i = 1, 2$

(Se ci sono problemi svolgere prima l'esercizio 2)

Esercizio 2.
Sia A anello commutativo unitario e I ideale di A, $B := \frac{A}{I}$ e $\pi : A \to B$ la proiezione canonica, dimostrare che:

- $\forall J$ ideale di A, $I \subseteq J \Rightarrow \pi(J)$ è un ideale di B
- $\forall J'$ ideale di B, $\pi^{-1}(J') := \{a \in A \ t.c. \ \pi(a) \in J'\}$ è un ideale di A
- Esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali di B e gli ideali di A contenenti I
- Usare quanto visto per dimostrare che se I è massimale allora B è un campo
- Se I è l'unico ideale massimale di A allora $A \setminus I = \mathcal{U}(A)$
- se P ideale primo di A (contente I) allora $\pi(P)$ è ideale primo di B

Sia $\pi : A \to \frac{A}{I}$ la proiezione canonica ($\pi(a) = a + I$)

- Dimostrare che π è un ben definito omomorfismo suriettivo
- Dimostrare che se M è l'unico idealele massimale contente I allora B è locale.

Esercizio 2.bis
Sia $\sqrt{I} := \{a \in A \mid a^k \in I,\ \exists k \in \mathbb{N}\}$, dimostrare che:

- $\sqrt{I}$ è un ideale di A
- $I \subseteq \sqrt{I}$
- $\pi(\sqrt{I}) = Nil(B) :=$ { elementi nilpotenti di B}

Esercizio 3.
Sia $A = Z_{(15)} := \{\frac{m}{15^t} \in \mathbb{Q} \mid m, t \in Z,\ t \geq 0\}$.

- Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$
- Determinare gli elementi invertibili di A
- Provare che per ogni $p \neq 3, 5$, con p primo, $(p) = pA$ è un ideale massimale in A e $(p) \cap \mathbb{Z}$ è un ideale primo di $\mathbb{Z}$
- Se I è un ideale di A provare che $I \cap \mathbb{Z}$ è un ideale di $\mathbb{Z}$
- Provare che se $I \neq J$ sono ideali di A allora $I \cap \mathbb{Z} \neq J \cap \mathbb{Z}$
- Provare che se I è primo o massimale allora $I \cap \mathbb{Z}$ è primo o massimale